레너드 서스킨드

고전 역학 편

조지 라보프스키

이종필 옮김

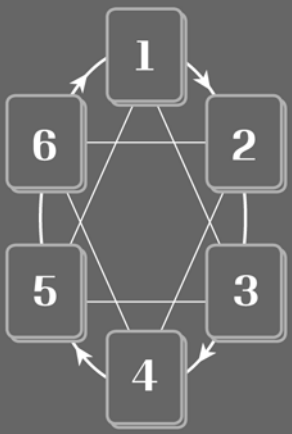
물리의 정석 솔루션

The Theoretical Minimum

사이언스 북스
SCIENCE BOOKS

1강

고전 물리학의 본성



스타인벡 지역 어딘가에서 지친 두 사내가 길가에 앉았다.

레니는 손가락으로 턱수염을 쓰다듬으며 말했다.

"조지, 물리학의 법칙에 대해서 말해 주게나."

조지는 잠깐 아래를 내려다보더니 안경 위쪽 너머로 레니를 빤히 쳐다보았다.

"좋아, 레니. 하지만 최소한으로만일세."

연습 문제 1: 이 개념은 이론 물리학에서 무척 중요하다. 닫힌계란 무엇인지 생각해 보고 실제로 존재할 수 있는지 추론해 보라. 닫힌계를 설정하는 데 있어서 암묵적인 가정들은 무엇인가? 열린계는 무엇인가?

해답: 닫힌계는 주변의 모든 것으로부터 완전히 고립되어 외부의 영향을 받지 않는 계이다. (엄밀하게는 외부로부터 물질 교환만이 차단된 계를 닫힌계, 물질과 에너지 교환 모두 차단된 계를 고립계라고 구분해서 부른다.) 실제로 존재할 수 없지만, 이론 물리학에서 특정 대상을 탐구하기 위해 주변의 영향을 무시하고 그 대상을 닫힌계로 가정하기도 한다. 열린계는 주변과 연결되어 외부의 영향을 받는 계이다.

닫힌계를 설정하는 데 있어서 필요한 가정은 다음과 같다.

① 전체 우주는 닫힌계이다.
② 닫힌계는 외부의 모든 것으로부터 차단되어 있다. 실제로는 그렇지 않지만 외부의 미미한 영향을 무시할 수 있다.
③ 외부의 영향이 클 경우 (외부의 영향을 포함한) 더 포괄적인 계를 정의함으로써 닫힌계를 새로 설정할 수 있다.

연습 문제 2: 여섯 가지 상태를 가진 계의 가능한 법칙들을 분류하는 일반적인 방법을 생각해 낼 수 있겠는가?

해답:

① 가능한 순환의 개수를 고려한다. 이 계의 경우 순환의 개수는 1개(1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 1)부터 6개(1 → 1, 2 → 2, 3 → 3, 4 → 4, 5 → 5, 6 → 6)까지 가능하다.

② 순환의 개수별로 가능한 조합들을 나열함으로써 동역학 법칙들을 분류할 수 있다.

· 1개의 순환: (1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 1), (5 → 3 → 2 → 4 → 6 → 1 → 5) 등.

· 2개의 순환: (1 → 1, 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 2), (3 → 6 → 3, 2 → 5 → 1 → 4 → 2), (1 → 3 → 2 → 1, 6 → 5 → 4 → 6) 등.

⋮

· 6개의 순환: (1 → 1, 2 → 2, 3 → 3, 4 → 4, 5 → 5, 6 → 6).

연습 문제 3: 식 (2)에서 (5)까지의 동역학 법칙들 중 어떤 것을 허용할 수 있는지 정하라.

해답: 동역학 법칙은 결정론적이고 가역적이어야 한다. 즉 어느 시각 n에서의 위치 $N(n)$이 정해지면 바로 다음 시각 $n+1$에서의 위치 $N(n+1)$이 결정되어야 하고(결정론적 법칙), 직전의 시각 $n-1$에서의 위치 $N(n-1)$ 또한 알 수 있어야 한다(가역적 법칙).

① 식 (2): $N(n+1)=N(n)-1$

$N(n)$이 정해지면 $N(n+1)=N(n)-1$이 결정되므로 결정론적이다. 그리고 다음의 과정을 통해 $N(n-1)$ 또한 알 수 있다. 즉 가역적이다.

$$N(n)=N(n-1)-1$$
$$N(n-1)=N(n)+1.$$

따라서 식 (2)는 허용된다.

② 식 (3): $N(n+1)=N(n)+2$

$N(n)$이 정해지면 $N(n+1)=N(n)+2$이 결정되므로 결정론적이다. 그리고

$$N(n)=N(n-1)+2$$
$$N(n-1)=N(n)-2$$

이므로 가역적이다. 따라서 식 (3)은 허용된다.

③ 식 (4): $N(n+1)=N(n)^2$

$N(n)$이 정해지면 $N(n+1)=N(n)^2$도 결정되므로 결정론적이다. 그러나

$$N(n)=N(n-1)^2$$

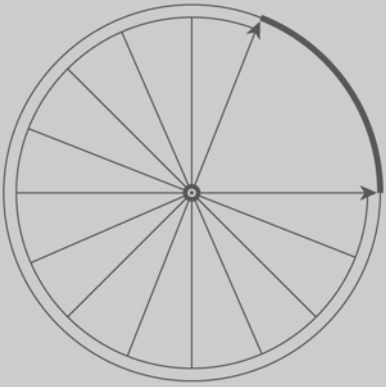
$$N(n-1)=\pm\sqrt{N(n)}$$

이므로 $N(n-1)$이 $+\sqrt{N(n)}$인지 $-\sqrt{N(n)}$인지 알 수 없다. 따라서 식 (4)는 비가역적이므로 허용될 수 없다.

④ 식 (5): $N(n+1)=(-1)^{N(n)}N(n)$

$N(n)$이 짝수이면 $N(n+1)=N(n)$, 홀수이면 $N(n+1)=-N(n)$이므로 결정론적이다. 마찬가지로 $N(n)$이 짝수인지 홀수인지에 따라 $N(n)=N(n-1)$ 또는 $N(n)=-N(n-1)$의 관계가 정해지므로 $N(n-1)$ 또한 알 수 있다. 따라서 식 (5)는 가역적이므로 허용된다.

막간 1 ✵ 공간, 삼각법, 벡터



"우리가 어디 있는 거야, 조지?"

조지는 지도를 꺼내 레니 앞에 펼쳐 놓았다.

"우리는 바로 여기 있어, 레니.

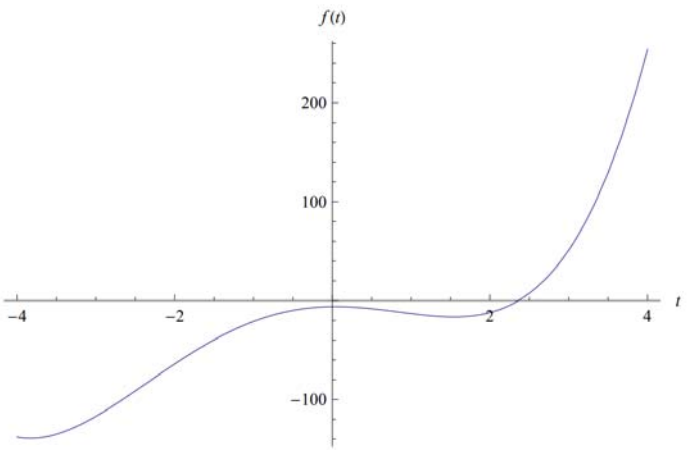
좌표로 북위 36.60709도, 서경 -121.618652도."

"응? 무슨 좌표라고 조지?"

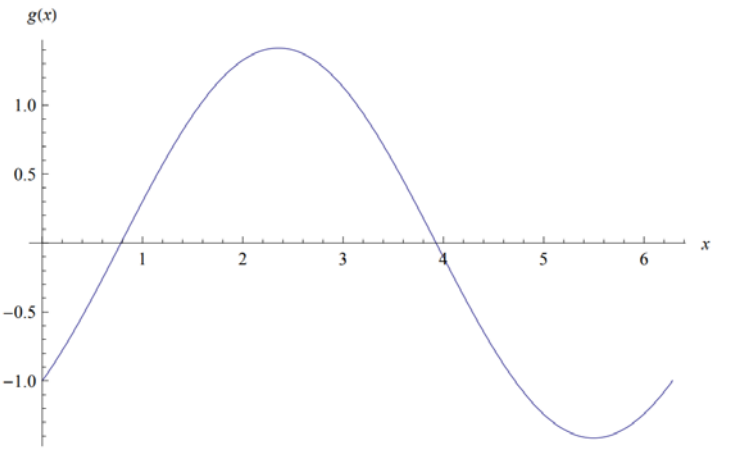
연습 문제 1: 그래프 계산기나 매스매티카(Mathematica) 같은 프로그램을 써서 다음 함수들을 그려라. 삼각 함수에 익숙하지 않다면 다음 장을 보라.

해답:

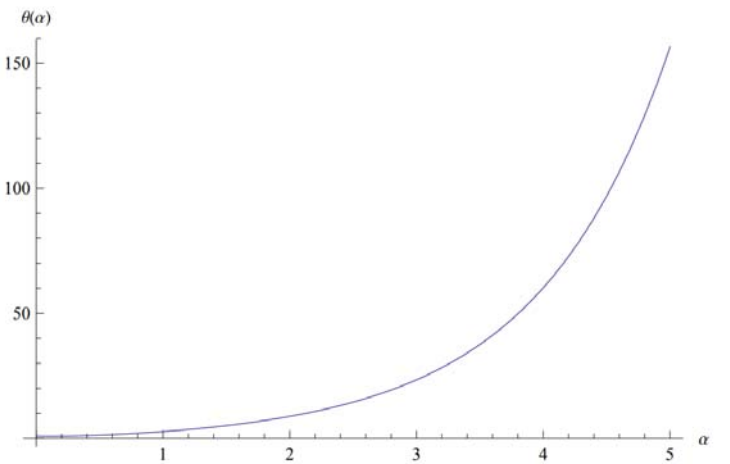
① $f(t)=t^4+3t^3-12t^2+t-6$



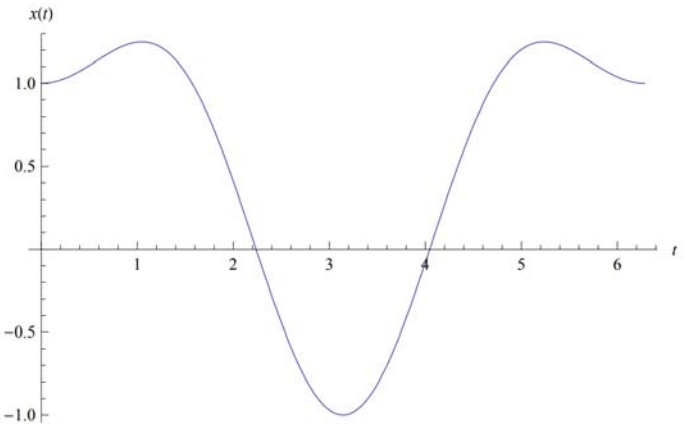
② $g(x) = \sin x - \cos x$



③ $\theta(\alpha) = e^{\alpha} + \alpha \ln \alpha$



④ $x(t)=\sin^2 t-\cos t$



연습 문제 2: 벡터의 뺄셈 규칙을 산출하라.

해답:

① $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$.

② 이때 $-\vec{B}$는 곱셈 규칙에 따라 $\vec{B}$와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터이다.

③ 덧셈 규칙에 따라 (평행 사변형 방법으로) $\vec{A}$와 $-\vec{B}$의 합을 구한다.

연습 문제 3: 벡터의 크기는 $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$를 만족한다는 것을 보여라.

해답: $\vec{A} = (A_x, A_y)$라고 할 때

$$|\vec{A}|^2 = \left(\sqrt{A_x^2 + A_y^2}\right)^2 = A_x^2 + A_y^2$$

이다. 한편

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = (A_x, A_y) \cdot (A_x, A_y) = A_x A_x + A_y A_y = A_x^2 + A_y^2$$

이므로 다음의 관계가 성립한다.

$$|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}.$$

연습 문제 4: $(A_x = 2, A_y = -3, A_z = 1), (B_x = -4, B_y = -3, B_z = 2)$ 라 하자. $\vec{A}$와 $\vec{B}$의 크기, 내적, 그리고 이 두 벡터 사이의 각도를 계산하라.

해답:

① 크기

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}.$$

② 내적

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (2, -3, 1) \cdot (-4, -3, 2) \\ &= 2 \times (-4) + (-3) \times (-3) + 1 \times 2 \\ &= (-8) + 9 + 2 = 3.\end{aligned}$$

③ 사이각

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta = \sqrt{14}\,\sqrt{29}\,\cos\theta = 3.$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{14}\,\sqrt{29}}.$$

$\therefore\ \theta \approx 81^\circ$. (계산기 필요.)

연습 문제 5: 어떤 벡터 쌍이 직교하는지 정하라.

$(1,1,1),(2,-1,3),(3,1,0),(-3,0,2)$

해답: 임의의 고른 두 벡터의 내적이 0이면 두 벡터는 직교한다. 4개의 벡터 중 임의로 두 벡터를 골라 내적을 구하는 가짓수는 총 6가지이다.

① $(1,1,1)\cdot(2,-1,3)=1\times2+1\times(-1)+1\times3=2-1+3=4\neq0.$

② $(1,1,1)\cdot(3,1,0)=1\times3+1\times1+1\times0=3+1+0=4\neq0.$

③ $(1,1,1)\cdot(-3,0,2)=1\times(-3)+1\times0+1\times2=-3+2=-1\neq0.$

④ $(2,-1,3)\cdot(3,1,0)=2\times3+(-1)\times1+3\times0=6-1+0=5\neq0.$

⑤ $(2,-1,3)\cdot(-3,0,2)=2\times(-3)+(-1)\times0+3\times2=-6+6=0.$

⑥ $(3,1,0)\cdot(-3,0,2)=3\times(-3)+1\times0+0\times2=-9\neq0.$

따라서 직교하는 두 벡터는 $(2,-1,3)$과 $(-3,0,2)$이다.

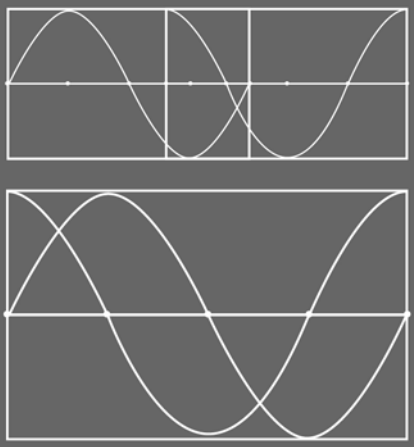
연습 문제 6: 직교하는 두 벡터의 내적이 왜 0인지 설명할 수 있는가?

해답: 직교하는 두 벡터의 사이각 $\theta = 90^\circ$ 이므로 다음과 같이 내적을 계산할 수 있다.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos 90^\circ = 0.$$

2강

운동



레니가 불평한다.

"조지, 이렇게 스트로보 사진처럼 팡팡 튀는 것 때문에 짜증나.

시간은 정말 그렇게 울퉁불퉁한 거야?

좀 더 매끄럽게 진행하는 게 있었으면 좋겠는데."

조지는 잠깐 생각하더니 칠판을 지웠다.

"좋아, 레니. 오늘은 매끄럽게 변화하는 계를 공부하자고."

연습 문제 1: 다음 각 함수들의 도함수를 계산하라.

해답:

① $f(t)=t^4+3t^3-12t^2+t-6$

$\frac{dt^n}{dt}=nt^{n-1}$이므로

$\frac{df}{dt}=4t^3+3\times 3t^2-12\times 2t+1=4t^3+9t^2-24t+1.$

② $g(x)=\sin x-\cos x$

$\frac{d(\sin t)}{dt}=\cos t,\ \frac{d(\cos t)}{dt}=-\sin t$이므로

$\frac{dg}{dx}=\frac{d(\sin x)}{dx}-\frac{d(\cos x)}{dx}=\cos x-(-\sin x)=\cos x+\sin x.$

③ $\theta(\alpha)=e^\alpha+\alpha\ln\alpha$

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{d\alpha}&=\frac{de^\alpha}{d\alpha}+\frac{d}{d\alpha}(\alpha\ln\alpha)\\&=\frac{de^\alpha}{d\alpha}+\frac{d\alpha}{d\alpha}\ln\alpha+\alpha\frac{d(\ln\alpha)}{d\alpha}\\&=e^\alpha+\ln\alpha+\alpha\times\frac{1}{\alpha}\\&=e^\alpha+\ln\alpha+1.\end{aligned}$$

④ $x(t)=\sin^2 x-\cos x$

$\sin t=u$라고 하면, 연쇄 규칙에 따라

$$\frac{d(\sin^2 t)}{dt}=\frac{du^2}{du}\frac{du}{dt}=\frac{du^2}{du}\frac{d(\sin t)}{dt}=2u\cos t=2\sin t\cos t.$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=\frac{d(\sin^2 t)}{dt}-\frac{d(\cos t)}{dt}=2\sin t\cos t-(-\sin t)$$

$$=2\sin t\cos t+\sin t.$$

연습 문제 2: 도함수의 도함수는 2차 도함수라 부르며 $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$이라 쓴다. 위 함수들 각각의 2차 도함수를 구하라.

해답:

① $\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\frac{df}{dt})=\frac{d}{dt}(4t^3+9t^2-24t+1)=12t^2+18t-24.$

② $\frac{d^2g}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dg}{dx})=\frac{d}{dx}(\cos x+\sin x)=-\sin x+\cos x.$

③ $\frac{d^2\theta}{d\alpha^2}=\frac{d}{d\alpha}(\frac{d\theta}{d\alpha})=\frac{d}{d\alpha}(e^\alpha+\ln\alpha+1)=e^\alpha+\frac{1}{\alpha}.$

④ $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt})=\frac{d}{dt}(2\sin t\cos t+\sin t)$

$=2\cos t\cos t+2\sin t(-\sin t)+\cos t$

$=2(\cos^2 t-\sin^2 t)+\cos t.$

연습 문제 3: 연쇄 규칙을 이용해 다음 각 함수들의 도함수를 구하라.

해답:

① $g(t)=\sin(t^2)-\cos(t^2)$

$t^2=u$라고 하면

$$\frac{dg}{dt}=\frac{dg}{du}\frac{du}{dt}=\frac{d(\sin u-\cos u)}{du}\frac{dt^2}{dt}=(\cos u+\sin u)\,2t$$

$$=2t(\cos t^2+\sin t^2).$$

② $\theta(\alpha)=e^{3\alpha}+3\alpha\ln(3\alpha)$

$3\alpha=u$라고 하면

$$\frac{d\theta}{d\alpha}=\frac{d\theta}{du}\frac{du}{d\alpha}=\frac{d(e^u+u\ln u)}{du}\frac{d(3\alpha)}{d\alpha}=(e^u+\ln u+u\times\frac{1}{u})\times 3$$

$$=3(e^u+\ln u+1)=3(e^{3\alpha}+\ln 3\alpha+1).$$

③ $x(t)=\sin^2(t^2)-\cos(t^2)$

$t^2=u$라고 하면

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{du}\frac{du}{dt}=\frac{d(\sin^2 u-\cos u)}{du}\frac{dt^2}{dt}=\left\{\frac{d(\sin^2 u)}{du}-(-\sin u)\right\}2t.$$

이때 $\sin u = v$라고 하면

$$\frac{d(\sin^2 u)}{du} = \frac{d(\sin^2 u)}{dv}\frac{dv}{du} = \frac{dv^2}{dv}\frac{dv}{du} = 2v\cos u = 2\sin u\cos u.$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 2t(2\sin u\cos u + \sin u) = 2t\sin u(2\cos u + 1)$$

$$= 2t\sin t^2(2\cos t^2 + 1).$$

연습 문제 4: 다음 규칙들을 증명하라.

해답:

① 합의 규칙

$f(t)+g(t)=h(t)$라고 하면

$$\frac{d(f+g)}{dt}=\frac{dh}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)+g(t+\Delta t)-(f(t)+g(t))}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}+\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{df}{dt}+\frac{dg}{dt.}$$

② 곱의 규칙

$f(t)g(t)=h(t)$라고 하면

$$\frac{d(fg)}{dt}=\frac{dh}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)g(t+\Delta t)-f(t)g(t)}{\Delta t}.$$

분자에 $f(t+\Delta t)g(t)$를 한 번씩 더하고 빼면

$$\frac{d(fg)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)g(t+\Delta t)-f(t)g(t)+f(t+\Delta t)g(t)-f(t+\Delta t)g(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)g(t)-f(t)g(t)}{\Delta t}+\frac{f(t+\Delta t)g(t+\Delta t)-f(t+\Delta t)g(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}g(t)+f(t+\Delta t)\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{df}{dt}g+f\frac{dg}{dt}.\quad(\Delta t\to 0\text{일 때 }f(t+\Delta t)\to f(t))$$

③ 연쇄 규칙

$$\frac{df}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}$$

$$=\frac{df}{du}\frac{du}{dt}.$$

연습 문제 5: 식 (2)의 각 공식을 증명하라. (힌트: 참고서에서 삼각법의 항등식과 극한의 성질을 조사해 보라.)

해답:

사전 정리

(a) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$\cos(A-B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(b) $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(d) $e\equiv\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=2.718281828\cdots$

① $\frac{d(\sin t)}{dt}=\cos t$

$$\frac{d(\sin t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(t+\Delta t)-\sin t}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin t\cos\Delta t+\cos t\sin\Delta t-\sin t}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\cos t\frac{\sin\Delta t}{\Delta t}+\sin t\frac{\cos\Delta t-1}{\Delta t}.$$

(c)에 의해 첫째 항의 극한은 $\cos t$이고, (b)를 이용하면 둘째 항의 극한은

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sin t\frac{\cos\Delta t-1}{\Delta t}=\sin t\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{\Delta t}{2}}{\Delta t}$$

$$=-\sin t\lim_{\frac{\Delta t}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}}\sin\frac{\Delta t}{2}$$

$$=(-\sin t)\times 1\times\sin 0=0.$$

$$\therefore\ \frac{d(\sin t)}{dt}=\cos t.$$

② $\dfrac{d(\cos t)}{dt}=-\sin t$

$$\frac{d(\cos t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos(t+\Delta t)-\cos t}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos t\cos\Delta t-\sin t\sin\Delta t-\cos t}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}(-\sin t)\frac{\sin\Delta t}{\Delta t}+\cos t\frac{\cos\Delta t-1}{\Delta t}$$

$$=-\sin t\times 1+\cos t\times 0=-\sin t.$$

③ $\frac{de^t}{dt}=e^t$

$$\frac{de^t}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{t+\Delta t}-e^t}{\Delta t}=e^t\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\Delta t}-1}{\Delta t}.$$

한편 $e^{\Delta t}-1=u$라고 하면 $\Delta t=\ln(1+u)$.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\Delta t}-1}{\Delta t}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}.$$

e의 정의 (d)에 의해

$$\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

$$\therefore\ \frac{de^t}{dt}=e^t\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=e^t\times 1=e^t.$$

④ $\frac{d(\ln t)}{dt}=\frac{1}{t}$

$\ln t=u$라고 하면 $t=e^u$.

$$\frac{dt}{du}=\frac{de^u}{du}=e^u=t.$$

$$\therefore\ \frac{du}{dt}=\frac{1}{t}.$$

연습 문제 6: 진동하는 입자가 완전한 한 주기 운동을 끝낼 때까지 얼마나 걸리는가?

해답: 1차원에서 진동하는 입자의 시간에 따른 위치 함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$x(t)=R\sin\omega t$. (R: 진폭, ω: 각진동수)

어느 시점 t에서의 위치 $x(t)$는 주기 T 만큼의 시간이 지났을 때의 위치 $x(t+T)$와 같아야 하므로

$$x(t)=x(t+T)$$
$$R\sin\omega t=R\sin\omega(t+T)$$
$$\sin\omega t=\sin(\omega t+\omega T)$$
$$\sin\omega t=\sin\omega t\cos\omega T+\cos\omega t\sin\omega T\cdots\quad(6.1)$$

이다. 식 (6.1)이 모든 t에 대해 성립하려면, 즉 t에 대한 항등식이 되려면

$\sin\omega t=\sin\omega t\times 1+\cos\omega t\times 0$의 꼴이 되어야 한다. 즉

$$\cos\omega T=1$$
$$\sin\omega T=0.$$

이것을 만족하는 ωT의 값 $2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots$ 중에서 주기의 정의에 따라 최솟값은 $\omega T=2\pi$이다.

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

즉 단순 조화 운동에서 주기는 2π를 각진동수 ω로 나눈 값이다.

연습 문제 7: 이 운동의 위치 벡터와 속도 벡터가 수직이라는 것을 보여라.

해답: 2차원 단순 조화 운동자의 위치 $\vec{r}(t)$와 속도 $\vec{v}(t)$는 각각 다음과 같다.

$$\vec{r}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t) = R(\cos\omega t, \sin\omega t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = R(\frac{d}{dt}\cos\omega t, \frac{d}{dt}\sin\omega t) = R(-\omega\sin\omega t, \omega\cos\omega t)$$

$$= R\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t).$$

이때

$$\vec{r}\cdot\ \vec{v} = R(\cos\omega t, \sin\omega t)\cdot\ \ R\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t)$$

$$= R^2\omega(\cos\omega t(-\sin\omega t) + \sin\omega t\cos\omega t)$$

$$= 0.$$

두 벡터의 내적이 0이므로 두 벡터는 서로 수직이다.

연습 문제 8: 다음 각 위치 벡터에 대해 속도, 속력, 가속도를 계산하라. 그래프를 그리는 소프트웨어가 있으면 각각의 위치 벡터, 속도 벡터, 가속도 벡터를 그려라.

해답: 속도 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$, 속력 $|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$, 가속도 $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$의 관계식을 이용해 각각을 구한다.

① $\vec{r}=(\cos\omega t, e^{\omega t})$

$$\vec{v}=(\frac{d}{dt}\cos\omega t, \frac{d}{dt}e^{\omega t})=(-\omega\sin\omega t, \omega e^{\omega t})=\omega(-\sin\omega t, e^{\omega t})$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{\omega^2(\sin^2\omega t+e^{2\omega t})}=\omega\sqrt{\sin^2\omega t+e^{2\omega t}}$$

$$\vec{a}=\omega(\frac{d}{dt}(-\sin\omega t), \frac{d}{dt}e^{\omega t})=\omega(-\omega\cos\omega t, \omega e^{\omega t})=\omega^2(-\cos\omega t, e^{\omega t}).$$

② $\vec{r}=(\cos(\omega t-\phi), \sin(\omega t-\phi))$

$$\vec{v}=(\frac{d}{dt}\cos(\omega t-\phi), \frac{d}{dt}\sin(\omega t-\phi))=\omega(-\sin(\omega t-\phi), \cos(\omega t-\phi))$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{\omega^2(\sin^2(\omega t-\phi)+\cos^2(\omega t-\phi))}=\omega$$

$$\vec{a}=\omega(\frac{d}{dt}\{-\sin(\omega t-\phi)\}, \frac{d}{dt}\cos(\omega t-\phi))=\omega(-\omega\cos(\omega t-\phi), -\omega\sin(\omega t-\phi))$$

$$=-\omega^2(\cos(\omega t-\phi), \sin(\omega t-\phi))=-\omega^2\vec{r}.$$

③ $\vec{r}=(c\cos^3 t, c\sin^3 t)$

$\vec{v}=(\frac{d}{dt}c\cos^3 t, \frac{d}{dt}c\sin^3 t)=c(3\cos^2 t(-\sin t), 3\sin^2 t\cos t)$

$=3c\sin t\cos t(-\cos t, \sin t)$

$|\vec{v}|=\sqrt{9c^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}=3c\sin t\cos t$

$\vec{a}=3c\frac{d\sin t\cos t}{dt}(-\frac{d\cos t}{dt}, \frac{d\sin t}{dt})=3c(\cos^2 t-\sin^2 t)(\sin t, \cos t).$

④ $\vec{r}=(c(t-\sin t), c(1-\cos t))$

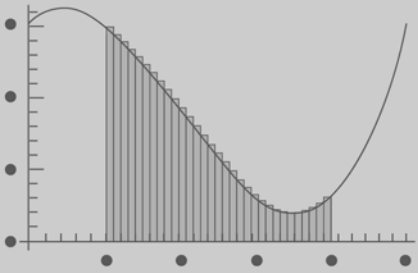
$\vec{v}=(\frac{d}{dt}c(t-\sin t), \frac{d}{dt}c(1-\cos t))=c(1-\cos t, \sin t)$

$|\vec{v}|=\sqrt{c^2\{(1-\cos t)^2+\sin^2 t\}}=c\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}$

$=c\sqrt{2(1-\cos t)}=c\sqrt{2\times 2\sin^2\frac{t}{2}}=2c\left|\sin\frac{t}{2}\right|=2c\sin\frac{t}{2}(t>0).$

$\vec{a}=c(\frac{d}{dt}(1-\cos t), \frac{d\sin t}{dt})=c(\sin t, \cos t).$

막간 2 ☼ 적분법



"조지, 난 무언가를 거꾸로 하는 걸 정말 좋아한다네.

미분을 거꾸로 계산할 수 있을까?"

"물론이지, 레니. 그걸 적분이라 부른다네."

연습 문제 1: 미분 과정을 뒤집고 상수를 더해서 다음 각 함수들의 부정적분을 구하라.

해답: 미적분의 기본 정리에 의해 $f(t)=\frac{d}{dt}F(t)$이면

$$\int f(t)dt=F(t)+c \ (c\text{는 적분 상수})$$

의 관계가 성립한다. 이를 이용해 주어진 $f(t)$에 대해 $F(t)$를 추론해 부정적분을 구할 수 있다.

① $f(t)=t^4$

$t^4=\frac{d}{dt}\frac{1}{5}t^5$이므로 $F(t)=\frac{1}{5}t^5$.

$\therefore \int f(t)dt=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+c.$

② $f(t)=\cos t$

$\cos t=\frac{d}{dt}\sin t$이므로 $F(t)=\sin t$.

$\therefore \int f(t)dt=\int \cos t dt=\sin t+c.$

③ $f(t)=t^2-2$

$t^2-2=\frac{d}{dt}(\frac{1}{3}t^3-2t)$이므로 $F(t)=\frac{1}{3}t^3-2t$.

$\therefore \int f(t)dt=\int (t^2-2)dt=\frac{1}{3}t^3-2t+c.$

연습 문제 2: 미적분의 기본 정리를 이용해 연습 문제 1의 각 적분을 적분 한도 $t=0$에서 $t=T$까지 계산하라.

해답:

① $f(t)=t^4$

$$\int_0^T t^4 dt = \left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^T = \frac{1}{5}T^5 - \frac{1}{5}\times 0 = \frac{1}{5}T^5.$$

② $f(t)=\cos t$

$$\int_0^T \cos t dt = [\sin t]_0^T = \sin T - \sin 0 = \sin T.$$

③ $f(t)=t^2-2$

$$\int_0^T (t^2-2)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t\right]_0^T = \frac{1}{3}T^3 - 2T.$$

연습 문제 3: 연습 문제 1의 각 함수를 어떤 입자의 가속도로 간주한다. 시간에 대해 한 번 적분해서 속도를 구하고, 두 번 적분해서 궤적을 구하라. t를 적분의 한도 중 하나로 쓸 것이므로 t'을 적분 변수로 도입한다. $t'=0$에서 $t'=t$까지 다음을 적분하라.

해답: 가속도 $a(t)$에 대해 속도는 $v(t)=\int a(t)dt$이고 위치는 $x(t)=\int v(t)dt$이다.

① $a(t)=t^4$

$$v(t)=\int_0^t a(t')dt'=\int_0^t t'^4dt'=\left[\frac{1}{5}t'^5\right]_0^t=\frac{1}{5}t^5$$

$$x(t)=\int_0^t v(t')dt'=\int_0^t \frac{1}{5}t'^5dt'=\left[\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}t'^6\right]_0^t=\frac{1}{30}t^6.$$

② $a(t)=\cos t$

$$v(t)=\int_0^t \cos t'dt'=[\sin t']_0^t=\sin t$$

$$x(t)=\int_0^t \sin t'dt'=[-\cos t']_0^t=-\cos t-(-\cos 0)=-\cos t+1.$$

③ $a(t)=t^2-2$

$$v(t)=\int_0^t (t'^2-2)dt'=\left[\frac{1}{3}t'^3-2t'\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3-2t$$

$$x(t)=\int_0^t (\frac{1}{3}t'^3-2t')dt'=\left[\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}t'^4-2\times\frac{1}{2}t'^2\right]_0^t=\frac{1}{12}t^4-t^2.$$

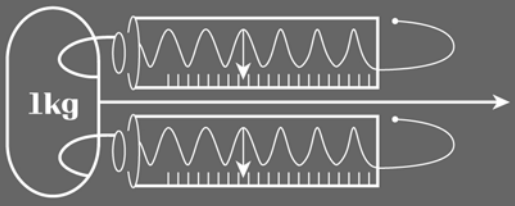
연습 문제 4: 계산을 마무리하라. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

해답: 부분 적분 계산법 $\int \frac{df}{dx} g\,dx = fg - \int f\frac{dg}{dx}dx$를 이용해 구할 수 있다. $\frac{df}{dx} = \cos x, g = x$라고 하면, $f = \sin x, \frac{dg}{dx} = 1$이므로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)x dx &= [(\sin x)x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= [(\sin x)x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (\sin\frac{\pi}{2})\times\frac{\pi}{2} - (\sin 0)\times 0 - \left\{-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\right\} \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 - (-0-(-1)) = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

3강

동역학



레니: “물체가 왜 움직이지, 조지?”

조지: “힘 때문이지, 레니.”

레니: “물체는 왜 운동을 멈추지, 조지?”

조지: “힘 때문이지, 레니.”

연습 문제 1: 주어진 힘이 $F=2t^2$으로 시간에 따라 변하고, 초기 조건은 $t=0$일 때 $x(0)=\pi$이다. 아리스토텔레스의 법칙을 이용해 임의의 시간에서의 $x(t)$를 구해라.

해답: 아리스토텔레스의 법칙에 따르면 질량이 m인 물체의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$F=mv.$$

따라서 위치 $x(t)$는 속도 $v(t)=\dfrac{F(t)}{m}$를 한 번 적분한 것과 같다.

$$x(t)=\int v(t)dt=\int \frac{F(t)}{m}dt=\int \frac{2t^2}{m}dt=\frac{2}{m}\times\frac{1}{3}t^3+c=\frac{2}{3m}t^3+c.$$

이때 적분 상수 $c=x(0)=\pi$이므로

$$x(t)=\frac{2}{3m}t^3+\pi$$

이다.

연습 문제 2: 이 방정식을 적분하라. $\dot{v_z} = \frac{F_z}{m}$. ($F_z$는 상수)

해답: $v(t) = \int \dot{v_z}(t)dt = \int \frac{F_z}{m}dt = \frac{F_z}{m}t + v_z(0)$. ($v_z(0)$는 적분 상수이자 초기 속도)

연습 문제 3: 이 식을 미분해서 운동 방정식을 만족함을 보여라.

$$z(t) = z_0 + v_z(0)t + \frac{F_z}{2m}t^2.$$

해답:

$$v_z(t) = \dot{z}(t) = \frac{d}{dt}(z_0 + v_z(0)t + \frac{F_z}{2m}t^2) = v_z(0) + \frac{F_z}{m}t$$

$$a_z(t) = \dot{v_z}(t) = \frac{d}{dt}(v_z(0) + \frac{F_z}{m}t) = \frac{F_z}{m}.$$

$$\therefore \ F_z = ma_z.$$

연습 문제 4: 식(6)에 대한 일반적인 풀이는 두 상수 A, B를 써서 $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$로 주어진다는 것을 미분을 써서 보여라. 그리고 A와 B를 써서 시간 $t=0$에서의 초기 위치와 속도를 정하라.

해답: 식 (6): $\ddot{x} = -\omega^2 x$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

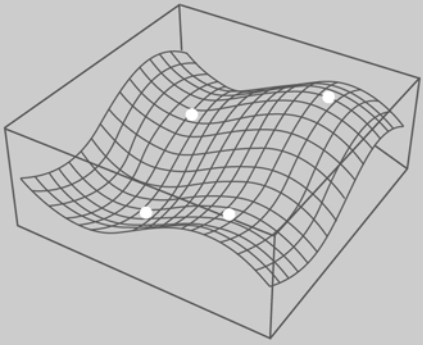
$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

$$= -\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = -\omega^2 x.$$

한편 초기 위치 $x(0)$와 초기 속도 $\dot{x}(0)$는 다음과 같다.

$$x(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A$$

$$\dot{x}(0) = -A\omega\sin 0 + B\omega\cos 0 = B\omega.$$



"저길 봐, 레니. 저 언덕과 계곡이 아름답지 않아?"

"그렇군, 조지. 돈을 좀 벌면 저기 어디 땅을 좀 구할 수 있을까?

그럴 수 있을까?"

조지가 실눈을 하고 바라보았다.

"정확하게 어디를 보고 있는 거야, 레니?"

레니가 가리켰다.

"바로 저기야, 조지. 저기 국소적으로 최소인 곳."

연습 문제 1: 다음 함수들에 대해 모든 1차, 2차 편미분(혼합 미분 포함)을 계산하라.

해답:

① $x^2+y^2=\sin(xy)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=\frac{\partial}{\partial x}\sin(xy)$$

$$2x=y\cos(xy).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=\frac{\partial}{\partial y}\sin(xy)$$

$$2y=x\cos(xy).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin(xy)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\sin(xy)\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x)=\frac{\partial}{\partial x}(y\cos(xy))$$

$$2=-y^2\sin(xy).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sin(xy)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2y)=\frac{\partial}{\partial y}(x\cos(xy))$$

$$2=-x^2\sin(xy).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(x^2+y^2)=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\sin(xy)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\sin(xy)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2y) = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos(xy))$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial x}\cos(xy) + x\frac{\partial}{\partial x}\cos(xy) = \cos(xy) - xy\sin(xy).$$

② $V = \frac{x}{y}e^{(x^2+y^2)}$

$x^2+y^2 = u$라고 하면 연쇄 규칙에 의해

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{(x^2+y^2)} = \frac{\partial}{\partial x}e^u = \frac{\partial e^u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = e^u 2x = 2xe^{(x^2+y^2)}$$

이고, 마찬가지로 $\frac{\partial}{\partial y}e^{(x^2+y^2)} = 2ye^{(x^2+y^2)}$이다. 이를 이용해 x, y에 대한 V의 1, 2차 편미분을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{y}e^{(x^2+y^2)}) = (\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{y})e^{(x^2+y^2)} + \frac{x}{y}(\frac{\partial}{\partial x}e^{(x^2+y^2)})$$

$$= \frac{1}{y}e^{(x^2+y^2)} + \frac{x}{y}2xe^{(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{1}{y}(2x^2+1)e^{(x^2+y^2)}.$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{y}e^{(x^2+y^2)}) = (\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{y})e^{(x^2+y^2)} + \frac{x}{y}(\frac{\partial}{\partial y}e^{(x^2+y^2)})$$

$$= -\frac{x}{y^2}e^{(x^2+y^2)} + \frac{x}{y}2ye^{(x^2+y^2)}$$

$$= (-\frac{1}{y^2}+2)xe^{(x^2+y^2)}.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}(2x^2+1)e^{(x^2+y^2)}\right)$$

$$=\frac{1}{y}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial x}(2x^2+1)\right\}e^{(x^2+y^2)}+(2x^2+1)(\frac{\partial}{\partial x}e^{(x^2+y^2)})\right]$$

$$=\frac{1}{y}\left[4xe^{(x^2+y^2)}+(2x^2+1)2xe^{(x^2+y^2)}\right]=\frac{2x(2x^2+3)e^{(x^2+y^2)}}{y}.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left((-\frac{1}{y^2}+2)xe^{(x^2+y^2)}\right)$$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{1}{y^2}+2)\right\}xe^{(x^2+y^2)}+(-\frac{1}{y^2}+2)\frac{\partial x}{\partial y}e^{(x^2+y^2)}$$

$$+(-\frac{1}{y^2}+2)x\frac{\partial}{\partial y}e^{(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{2}{y^3}xe^{(x^2+y^2)}+0+(-\frac{1}{y^2}+2)x(2ye^{(x^2+y^2)})$$

$$=2xe^{(x^2+y^2)}(\frac{1}{y^3}-\frac{1}{y}+2y).$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left((-\frac{1}{y^2}+2)xe^{(x^2+y^2)}\right)$$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{y^2}+2)\right\}xe^{(x^2+y^2)}+(-\frac{1}{y^2}+2)\frac{\partial x}{\partial x}e^{(x^2+y^2)}$$

$$+(-\frac{1}{y^2}+2)x(2xe^{(x^2+y^2)})$$

$$=0+(-\frac{1}{y^2}+2)e^{(x^2+y^2)}+2x^2(-\frac{1}{y^2}+2)e^{(x^2+y^2)}$$

$$=(2x^2+1)(-\frac{1}{y^2}+2)e^{(x^2+y^2)}.$$

③ $V = e^x \cos y$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = \frac{\partial e^x}{\partial x}\cos y + e^x \frac{\partial}{\partial x}\cos y = e^x \cos y.$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) = \frac{\partial e^x}{\partial y}\cos y + e^x \frac{\partial}{\partial y}\cos y = -e^x \sin y.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = e^x \cos y.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-e^x \sin y) = \frac{\partial(-e^x)}{\partial y}\sin y + (-e^x)\frac{\partial}{\partial y}\sin y = -e^x \cos y.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-e^x \sin y) = -e^x \sin y.$$

연습 문제 2: 점 $(x=\frac{\pi}{2}, y=-\frac{\pi}{2})$, $(x=-\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2})$, $(x=-\frac{\pi}{2}, y=-\frac{\pi}{2})$를 생각해 보자. 이 점들은 다음 함수들에 대해서 정류점인가? 만약 그렇다면 어떤 형태인가?

해답:

① $F(x,y)=\sin x+\sin y$

$F(x,y)$ 위의 점이 정류점이 되기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\cos x=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}=\cos y=0.$$

이때 $\cos\frac{\pi}{2}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 주어진 세 점은 모두 정류점이다. 한편

$$Det\,F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2,\ Tr\,H=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

에 대해 정류점의 형태는 다음과 같이 판별한다.

(a) $Det\,F>0,\ Tr\,F>0$ → 극소점
(b) $Det\,F>0,\ Tr\,F<0$ → 극대점
(c) $Det\,F<0$ → 안장점

이 문제에 적용하면

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\sin x, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sin y, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

이므로

$$DetF = \sin x \sin y, TrF = -\sin x - \sin y$$

이다. 주어진 세 점을 각각 대입하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

(i) $(x = \frac{\pi}{2}, y = -\frac{\pi}{2})$: $DetF = \sin\frac{\pi}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$이므로 안장점이다.

(ii) $(x = -\frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2})$: $DetF = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0$이므로 안장점이다.

(iii) $(x = -\frac{\pi}{2}, y = -\frac{\pi}{2})$: $DetF = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$, $TrF = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -(-1) - (-1) = 2 > 0$이므로 극소점이다.

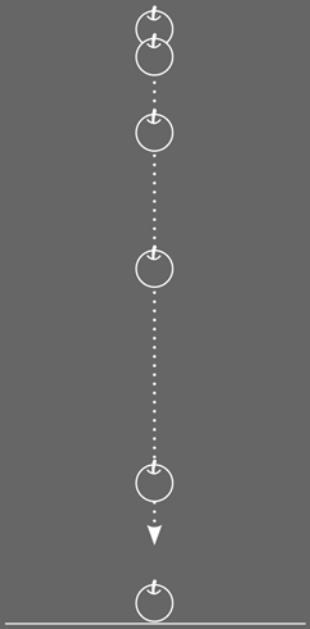
② $F(x,y) = \cos x + \cos y$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin x, \frac{\partial F}{\partial y} = -\sin y.$$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$이므로 주어진 세 점 모두 $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$이다. 즉 정류점이 아니다.

5강

에너지



"어르신, 기관차 밑에서 뭘 찾고 계십니까?"

레니는 커다란 증기 기관차를 무척 좋아했다. 그래서 이따금씩 비번인 날엔 조지가 레니를 조차장에 데리고 갔다. 오늘 이들은 당황해하는 한 노인을 만났다.

마치 무언가를 잃어버린 듯이 보였다.

"이걸 끄는 말은 어디 있나?"

그 노인이 조지에게 물었다.

"그게 말이죠. 말은 필요가 없습니다. 이게 어떻게 작동하는지 보여 드릴게요.

연습 문제 1: 식 (3)을 증명하라. (힌트: 곱의 미분법을 사용하라.)

해답: 식 (3): $\frac{dv^2}{dt}=2v\frac{dv}{dt}=2v\dot{v}$

곱의 미분법 $\frac{d}{dt}(fg)=\left(\frac{df}{dt}\right)g+f\left(\frac{dg}{dt}\right)$을 이용하면 $f=g=v$이므로

$$\frac{dv^2}{dt}=\frac{d}{dt}(vv)=\left(\frac{dv}{dt}\right)v+v\left(\frac{dv}{dt}\right)=\dot{v}v+v\dot{v}=2v\dot{v}$$

이다.

연습 문제 2: 2차원 (x,y) 공간 속의 한 입자를 생각해 보자. 이 입자는 질량 m을 갖고 있다. 퍼텐셜 에너지는 $V=\frac{1}{2}k(x^2+y^2)$이다. 이 입자의 운동 방정식을 구하라. 원궤도가 존재하며 모든 궤도는 주기가 똑같다는 것을 보여라. 총 에너지가 보존된다는 것을 명시적으로 보여라.

해답: 힘과 퍼텐셜 에너지의 관계 $F_i(x,y)=-\frac{\partial V(x,y)}{\partial x_i}$에 의해 운동 방정식은

$$m\ddot{x}_i=-\frac{\partial V(x,y)}{\partial x_i}$$

이다. 2차원 운동이므로 x 방향과 y 방향 각각에 대해 운동 방정식을 세울 수 있다.

$$m\ddot{x}_i=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}k(x^2+y^2)\right)=-kx,\ m\ddot{y}_i=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}k(x^2+y^2)\right)=-ky.$$

위치 벡터 $\vec{r}=(x,y)$로 나타내면 $\ddot{\vec{r}}=-\frac{k}{m}\vec{r}$이고, 이것은 2차원 단순 조화 운동 $\ddot{\vec{r}}=-\omega^2\vec{r}$의 형태이므로

$$\vec{r}=(R\cos\omega t, R\sin\omega t), \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

이다. (**3강 「동역학」** 참고)

이때 입자의 위치 $\vec{r}=(x,y)$는 $x^2+y^2=R^2$, 즉 원의 방정식을 만족하므로 이 입자는 궤도 반지름이 R인 원 운동을 한

다. 또한 궤도 반지름 R와 관계없이 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$는 일정하므로 주기 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 역시 일정하다. 한편

$$\vec{v}=(\dot{x},\dot{y})=(-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t),$$
$$v^2=R^2\omega^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)=R^2\omega^2$$

이므로 총 에너지는

$$E=T+V=\frac{1}{2}mv^2+V=\frac{1}{2}mR^2\omega^2+\frac{1}{2}k(x^2+y^2)$$
$$=\frac{1}{2}m(x^2+y^2)\frac{k}{m}+\frac{1}{2}k(x^2+y^2)$$
$$=k(x^2+y^2)$$

이고 시간 t에 대해 미분하면

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}k(x^2+y^2)=2k(x\dot{x}+y\dot{y})$$
$$=2k(-R^2\omega\cos\omega t\sin\omega t+R^2\omega\sin\omega t\cos\omega t)$$
$$=0$$

이다. 즉 총 에너지는 시간에 대해 불변이므로 보존된다.

연습 문제 3: 퍼텐셜 에너지 $V=\frac{k}{2(x^2+y^2)}$에 대해 연습 문제 2를 다시 풀어라. 원 궤도가 있는가? 만약 그렇다면 모두 주기가 똑같은가? 총 에너지는 보존되는가?

해답:

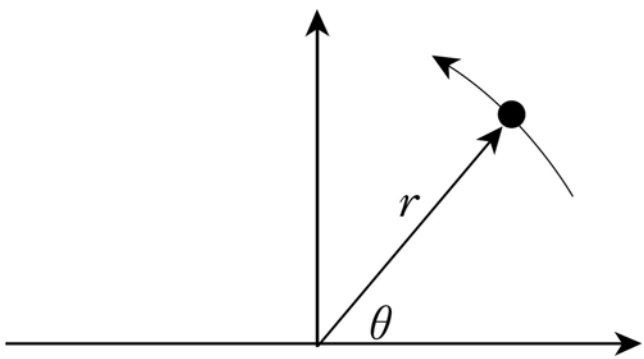


그림 5.1 극 좌표계

직교 좌표 (x,y)를 반지름 r와 회전각 θ에 대한 극 좌표 (r,θ)로 변환하면 다음의 관계가 성립한다.

$$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$$
$$x^2+y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2.$$

따라서 주어진 퍼텐셜 에너지를 극 좌표로 표현하면 $V=\frac{k}{2r^2}$가 된다.

퍼텐셜 에너지 원리를 적용하면

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{k}{r^3} \times \frac{x}{r} = \frac{kx}{r^4}$$

$$(\because \ \frac{\partial}{\partial x} r^2 = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) \ \rightarrow \ \ 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \ \rightarrow \ \ \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}.)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{ky}{r^4}$$

의 관계를 얻을 수 있다. $r = R$인 경우에 한해 다음과 같은 해를 구할 수 있다. (일반해를 구하는 과정은 복잡해 여기서는 다루지 않는다.)

$$x = R\cos\omega t, \ \ y = R\sin\omega t, \ \ \omega^2 = -\frac{1}{R^4}\frac{k}{m}.$$

즉 주어진 퍼텐셜 하에서 원 운동을 하는 특수해가 존재하며, 주기는

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi R^2\sqrt{-\frac{m}{k}}$$

이 된다. 즉 주기는 회전 반경의 제곱에 비례한다.

한편 총 에너지 보존은 다음의 과정을 통해 확인할 수 있다.

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2}r^{-2}$$

$$\dot{E} = m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) - kr^{-3}\dot{r}.$$

이때

$$\frac{d}{dt}r^2 = \frac{d}{dt}(x^2+y^2)$$

$$r\dot{r} = x\dot{x}+y\dot{y}$$

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r}$$

이므로 총 에너지의 시간 변화율은

$$\dot{E} = m(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}) - \frac{k(x\dot{x}+y\dot{y})}{r}$$

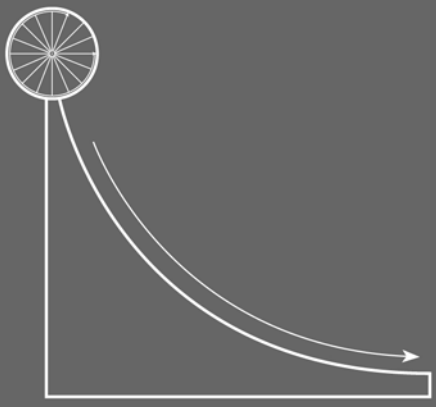
$$= (m\ddot{x} - \frac{kx}{r^4})\dot{x} + (m\ddot{y} - \frac{ky}{r^4})\dot{y}$$

$$= 0$$

이다. 따라서 $\dot{E}=0$이므로 총 에너지는 보존된다.

6강

최소 작용의 원리



레니는 좌절감을 맛보았다. 그의 키나 힘을 생각해 보았을 때
좋은 신호는 아니었다. 그의 머리도 상처를 입었다.
"조지, 난 이 모든 걸 다 기억할 수 없어. 힘, 질량, 뉴턴의 방정식, 운동량, 에너지.
물리를 하기 위해서는 이딴 걸 암기할 필요가 없다고 내게 말하지 않았나?
딱 하나만 기억하면 되게 할 수는 없나?"
"좋아, 레니. 진정하라고. 간단히 정리할게.
작용은 언제나 정적이다. 이것만 기억하라고."

연습 문제 1: 식 (4)는 뉴턴의 운동 방정식 $F=ma$의 또 다른 형태에 지나지 않다는 것을 보여라.

식 (4): $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0$

해답: $L=T-V$을 식 (4)에 대입하면

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial (T-V)}{\partial x}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}=0 \quad \cdots (\star)$$

이다. 각각의 항을 살펴보면 첫 번째 항은

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{d}{dt}m\dot{x}=m\ddot{x}$$

이고 두 번째 항은 x에만 의존하는 V의 $\dot{x}$에 대한 편미분이므로 0이다. 세 번째 항 역시 비슷하게 $\dot{x}$에만 의존하는 $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$의 x에 대한 편미분이므로 0이다. 네 번째 항은 힘과 퍼텐셜 에너지의 관계에 의해 $\frac{\partial V}{\partial x}=-F=-m\ddot{x}$이다. 따라서 식 $(\star)$은 다음과 같이 뉴턴의 운동 방정식으로 표현된다.

$$m\ddot{x}+0+0-F=0, \ \therefore \ F=m\ddot{x}.$$

연습 문제 2: 식 (6)은 뉴턴의 운동 방정식 $F_i = m_i \ddot{x}_i$의 또 다른 형태에 지나지 않음을 보여라.

식 (6): $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$

해답: 연습 문제 1의 풀이 과정을 다차원 공간으로 일반화하면 된다. $L = T - V$를 식 (6)에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial (T-V)}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0.$$

$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2$이므로 첫 번째 항은

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 = \sum_i \frac{d}{dt} m \dot{x}_i = \sum_i m \ddot{x}_i$$

이다. 연습 문제 1과 마찬가지로 두 번째, 세 번째 항은 0이고, 네 번째 항은 $\frac{\partial V}{\partial x_i} = -F_i$이다.

$$\therefore \sum_i m \ddot{x}_i - F_i = 0$$

$$F_i = \sum_i m \ddot{x}_i.$$

연습 문제 3: 오일러–라그랑주 방정식을 써서 식 (12)의 라그랑지안의 운동 방정식을 유도하라.

식 (12): $L=\frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right)+m\omega\left(\dot{X}Y-\dot{Y}X\right)$

해답: 2차원 공간 (X, Y)의 운동이므로 X, Y 각각에 대한 오일러–라그랑주 방정식이 존재한다.

① X에 대한 방정식

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}-\frac{\partial L}{\partial X}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}=\frac{\partial}{\partial \dot{X}}\left\{\frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right)+m\omega\left(\dot{X}Y-\dot{Y}X\right)\right\}$$

$$=m\dot{X}+m\omega Y.$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}=m\ddot{X}+m\omega\dot{Y}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial X}\left\{\frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right)+m\omega\left(\dot{X}Y-\dot{Y}X\right)\right\}$$

$$=m\omega^2X-m\omega\dot{Y}.$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}-\frac{\partial L}{\partial X}=m\ddot{X}+m\omega\dot{Y}-\left(m\omega^2X-m\omega\dot{Y}\right)$$

$$=m\ddot{X}-m\omega^2X+2m\omega\dot{Y}=0.$$

$$\therefore\ \ddot{X}=\omega^2X-2\omega\dot{Y}.$$

② Y에 대한 방정식

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}-\frac{\partial L}{\partial Y}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}=\frac{\partial}{\partial \dot{Y}}\left\{\frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right)+m\omega\left(\dot{X}Y-\dot{Y}X\right)\right\}$$

$$=m\dot{Y}-m\omega X.$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}=m\ddot{Y}-m\omega\dot{X}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial Y}\left\{\frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right)+m\omega\left(\dot{X}Y-\dot{Y}X\right)\right\}$$

$$=m\omega^2 Y+m\omega\dot{X}.$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}-\frac{\partial L}{\partial Y}=m\ddot{Y}-m\omega\dot{X}-\left(m\omega^2 Y+m\omega\dot{X}\right)$$

$$=m\ddot{Y}-m\omega^2 Y-2m\omega\dot{X}=0.$$

$$\therefore\ \ddot{Y}=\omega^2 Y+2\omega\dot{X}.$$

연습 문제 4: 극 좌표에서 조지의 라그랑지안과 오일러–라그랑주 방정식을 계산하라.

해답: (X, Y)에 대한 조지의 라그랑지안(연습 문제 3의 라그랑지안과 동일)

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right)+m\omega\left(\dot{X}Y-\dot{Y}X\right)$$

을 극 좌표 (r,θ)에 대한 라그랑지안으로 바꾸기 위해 다음의 관계식을 이용한다.

$$X=r\cos\theta,\ \ Y=r\sin\theta.$$
$$\dot{X}=\frac{d}{dt}(r\cos\theta)=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta,$$
$$\dot{Y}=\frac{d}{dt}(r\sin\theta)=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta.$$

이때 θ는 시간에 따른 각도 함수이므로

$$\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta},$$
$$\frac{d}{dt}\cos\theta=-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=-\dot{\theta}\sin\theta,$$
$$\frac{d}{dt}\sin\theta=\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\cos\theta.$$

주어진 라그랑지안에 대입하면

$$L=\frac{m}{2}\left\{(\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta)^2\right\}$$

$$+\frac{m\omega^2}{2}\{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\}$$

$$+m\omega\{(\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta)r\sin\theta-(\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta)r\cos\theta\}$$

$$=\frac{m}{2}(\dot{r}^2\cos^2\theta-2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

$$+\dot{r}^2\sin^2\theta+2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta)$$

$$+\frac{m\omega^2}{2}(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)$$

$$+m\omega(r\dot{r}\sin\theta\cos\theta-r^2\dot{\theta}\sin^2\theta-r\dot{r}\sin\theta\cos\theta-r^2\dot{\theta}\cos^2\theta)$$

$$=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{m\omega^2}{2}r^2-m\omega r^2\dot{\theta}.$$

2차원 공간 (r,θ)에서의 운동이므로 r, θ 각각에 대한 오일러–라그랑주 방정식이 존재한다.

① r에 대한 방정식

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2+m\omega^2r-2m\omega r\dot{\theta}$$

$$\therefore\ m\ddot{r}-(mr\dot{\theta}^2+m\omega^2r-2m\omega r\dot{\theta})=0$$

$$\ddot{r}=-\omega^2r+r\dot{\theta}^2-2\omega r\dot{\theta}.$$

② θ에 대한 방정식

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0.$$

$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})$ 꼴로 표현한 이유는 $mr^2\dot{\theta}$이 각운동량이기 때문이다. θ에 대한 오일러–라그랑주 방정식은 각운동량 보존 법칙을 나타낸다.

연습 문제 5: 이 결과들을 이용해서 길이 l인 진자의 운동을 예측하라.

해답: 진자의 위치와 속도를 극 좌표로 표현하면 다음과 같다.

$$(x, y) = (l\sin\theta, -l\cos\theta)$$

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{\theta} l\cos\theta, \dot{\theta} l\sin\theta). \because \dot{l} = 0.$$

따라서

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\theta}^2 l^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2 l^2\sin^2\theta\right) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgy = -mgl\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

이다. 라그랑지안이 θ에 대한 1변수 함수이므로 1개의 오일러-라그랑주 방정식이 존재한다.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right) - mgl(-\sin\theta) = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0.$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

θ가 충분히 작을 경우 다음과 같은 근사법을 통해 진자는 단순 조화 운동을 한다.

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \approx \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta,\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

$$\therefore\ \theta(t) = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,\theta\right).$$

$\theta_0 = \theta(0)$은 진자의 진폭이다. 충분히 작은 각도로 진동하는 진자는 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 의 주기를 갖는 단순 조화 운동을 한다.

연습 문제 6: 다음 변환을 어떻게 유도했는지 설명하라.

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right),\ x_+=\frac{x_1+x_2}{2},$$

$$x_-=\frac{x_1-x_2}{2}\ \rightarrow\ \ T=m\left(\dot{x}_+^2+\dot{x}_-^2\right).$$

해답:

$$x_++x_-=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}=x_1$$

$$x_+-x_-=\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}=x_2.$$

$$\dot{x}_1=\dot{x}_++\dot{x}_-,\ \dot{x}_2=\dot{x}_+-\dot{x}_-.$$

$$\therefore\ T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)=\frac{m}{2}\left\{\left(\dot{x}_++\dot{x}_-\right)^2+\left(\dot{x}_+-\dot{x}_-\right)^2\right\}$$

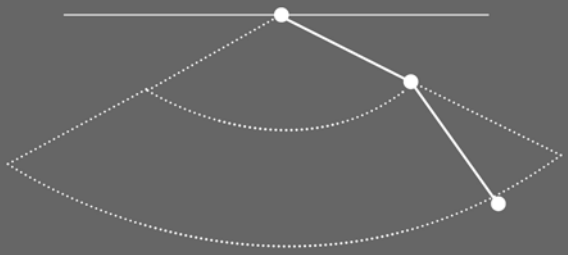
$$=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_+^2+2\dot{x}_+\dot{x}_-+\dot{x}_-^2+\dot{x}_+^2-2\dot{x}_+\dot{x}_-+\dot{x}_-^2\right)$$

$$=\frac{m}{2}\left(2\dot{x}_+^2+2\dot{x}_-^2\right)$$

$$=m\left(\dot{x}_+^2+\dot{x}_-^2\right).$$

7강

대칭성과 보존 법칙



레니는 지도를 읽느라 애먹었다.

자신이 보는 방향마다 언제나 북쪽인 것처럼 보였다.

레니는 왜 위아래보다 동서남북에 더 애를 먹는지 궁금했다.

위아래라면 거의 언제나 틀리지 않았을 텐데 말이다.

연습 문제 1: 식 (2)를 유도하고 부호의 차이를 설명하라.

식 (2): $\dot{p_1} = -V'(q_1-q_2)$, $\dot{p_2} = +V'(q_1-q_2)$. ($V' = \frac{\partial V}{\partial q}$.)

해답: 일반화된 좌표 q_1, q_2에 대해 퍼텐셜 에너지가 $V(q_1-q_2)$일 때 일반화된 운동량 p_1, p_2의 시간에 대한 변화율은 식 (2)와 같이 주어진다.

일반화된 운동량은 $p = m\dot{q}$이므로 $\dot{p} = m\ddot{q}$은 계에 작용하는 힘과 같다. 따라서 퍼텐셜 에너지 원리에 의해 $\dot{p} = m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$이다.

$q_1 - q_2 = u$라고 하면, $\frac{\partial u}{\partial q_1} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial q_2} = -1$이므로

$$\dot{p_1} = -\frac{\partial V(q_1-q_2)}{\partial q_1} = -\frac{\partial V(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q_1} = -\frac{\partial V(u)}{\partial u}\times 1 = -V'(u)$$

$$= -V'(q_1-q_2)$$

$$\dot{p_2} = -\frac{\partial V(q_1-q_2)}{\partial q_2} = -\frac{\partial V(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q_2} = -\frac{\partial V(u)}{\partial u}\times(-1) = +V'(u)$$

$$= +V'(q_1-q_2).$$

부호의 차이는 q_1, q_2에 작용하는 두 힘 $\dot{p_1}$, $\dot{p_2}$의 방향이 서로 반대 방향이라는 것을 나타낸다. 이것은 뉴턴의 운동 제3법칙인 작용-반작용 법칙과 의미가 같다.

연습 문제 2: 다음의 보존을 설명하라.

퍼텐셜 에너지가 $V(q_1, q_2) = V(aq_1 - bq_2)$일 때 $bp_1 + ap_2$가 보존된다.

해답: 계의 라그랑지안이

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^{\,2} + \dot{q}_2^{\,2}) + V(aq_1 - bq_2)$$

일 때 다음과 같은 좌표 변환을 통해 순환 좌표를 얻을 수 있다.

$$q_+ = aq_1 + bq_2, \quad q_- = aq_1 - bq_2.$$

$q_+ + q_- = 2aq_1$, $q_+ - q_- = 2aq_2$이므로 $aq_1 - bq_2 = q_-$이고 퍼텐셜 에너지는 $V(aq_1 - bq_2) = V(q_-)$이다. 따라서 q_+는 순환 좌표이고, 켤레 운동량 p_+는 보존된다. 한편

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2a}(\dot{q}_+ + \dot{q}_-), \quad \dot{q}_2 = \frac{1}{2b}(\dot{q}_+ - \dot{q}_-)$$

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_+} = \frac{1}{2a}, \quad \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \dot{q}_+} = \frac{1}{2b}$$

이므로

$$p_+ = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_+} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_+} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \dot{q}_+} = \frac{p_1}{2a} + \frac{p_2}{2b}$$

$$2abp_+ = bp_1 + ap_2$$

$$\frac{d}{dt}(2abp_+) = \frac{d}{dt}(bp_1 + ap_2) = 0$$

의 관계가 성립한다. 즉 $bp_1 + ap_2$의 보존은 순환 좌표 $q_+ = aq_1 + bq_2$의 켤레 운동량 p_+의 보존을 의미한다.

연습 문제 3: 식 (7)에 대해 $aq_1 + bq_2$의 조합은 라그랑지안과 함께 불변임을 보여라.

식 (7): $q_1 \to q_1 - b\delta,\ q_2 \to q_2 + a\delta$

해답:

$$aq_1 + bq_2 \to a(q_1 - b\delta) + b(q_2 + a\delta) = aq_1 - ab\delta + bq_2 + ab\delta = aq_1 + bq_2.$$

즉 식 (7)과 같은 좌표 변환에 대해 $aq_1 + bq_2$은 불변이다.

연습 문제 4: 다음이 사실임을 보여라.

$\delta x = y\delta$, $\delta y = -x\delta$일 때 라그랑지안은 δ의 1차 변위에 대해 변하지 않는다.

해답: 주어진 좌표 변환

$$x \to x + y\delta$$
$$y \to y - x\delta$$

에 대해 라그랑지안은 다음과 같이 변화한다.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - V(x^2+y^2)$$

$$\to L = \frac{1}{2}m\{(\dot{x}+\dot{y}\delta)^2+(\dot{y}-\dot{x}\delta)^2\} - V((x+y\delta)^2+(y-x\delta)^2)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+2\dot{x}\dot{y}\delta+\dot{y}^2\delta^2+\dot{y}^2-2\dot{x}\dot{y}\delta+\dot{x}^2\delta^2)$$

$$- V(x^2+2xy\delta+y^2\delta^2+y^2-2xy\delta+x^2\delta^2).$$

δ의 1차 변위에 대해서만 고려하면 2차 항은 0로 근사시킬 수 있다. ($\delta^2 = 0$.) 남은 1차 항 $\pm 2\dot{x}\dot{y}\delta$, $\pm 2xy\delta$가 모두 소거되므로

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - V(x^2+y^2)$$

이다. 즉 라그랑지안은 주어진 좌표 변환에 대해 불변이다.

연습 문제 5: 초기 각도 θ_0로부터 xy 평면에서 호를 그리며 흔들거리는 길이 l의 단순 진자에 대한 운동 방정식을 정하라.

해답: 진자의 위치와 속도를 극 좌표로 표현하면 다음과 같다.

$$(x, y) = (l\sin\theta, -l\cos\theta)$$

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{\theta} l\cos\theta, \dot{\theta} l\sin\theta).$$

$$\dot{l} = 0.$$

따라서

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}^2 l^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2 l^2\sin^2\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgy = -mgl\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

이다. 라그랑지안이 θ에 대한 1변수 함수이므로 1개의 오일러-라그랑주 방정식이 존재한다.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) - mgl(-\sin\theta) = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0.$$

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0.$$

θ가 충분히 작을 경우 다음과 같은 근사법에 따라 진자의 운동 방정식을 구할 수 있다.

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots=\theta$$

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

$$\ddot{\theta}=-\omega^2\theta,\ \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

$$\theta(t)=\theta_0\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\theta\right).$$

따라서 충분히 작은 각도로 진동하는 진자는 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 의 주기를 갖는 단순 조화 운동을 한다.

연습 문제 6: θ와 α에 대해 이중 진자의 오일러−라그랑주 방정식을 계산하라.

해답: 본문의 조건과 마찬가지로 중력장이 없고, 질량이 $M=1$, 길이가 $r=1$인 이중 진자를 가정하면, 계의 라그랑지안은 좌표 $(\theta, \phi=\theta+\alpha)$에 대해 다음과 같이 주어진다.

$$L(\theta,\phi)=\dot{\theta}^2+\frac{\dot{\phi}^2}{2}+\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi).$$

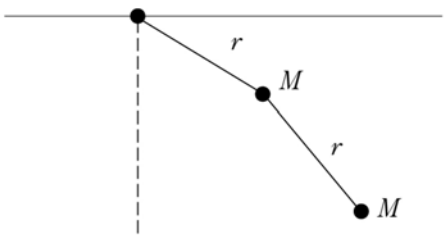


그림 7.1 이중 진자.

우선 θ에 대한 오일러−라그랑주 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{d}{dt}\left[2\dot{\theta}+\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)\right]$$

$$=2\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi)-(\dot{\theta}-\dot{\phi})\dot{\phi}\sin(\theta-\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=-\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta-\phi)$$

$$2\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi)-\dot{\phi}^2\sin(\theta-\phi)=0.$$

마찬가지로 ϕ에 대한 오일러-라그랑주 방정식 또한 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}-\frac{\partial L}{\partial\phi}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=\frac{d}{dt}\left[\dot{\phi}+\dot{\theta}\cos(\theta-\phi)\right]$$

$$=\ddot{\phi}+\ddot{\theta}\cos(\theta-\phi)-\dot{\theta}(\dot{\theta}-\dot{\phi})\sin(\theta-\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi}=\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta-\phi)$$

$$\ddot{\phi}+\ddot{\theta}\cos(\theta-\phi)-\dot{\theta}^2\sin(\theta-\phi)=0.$$

따라서 다음의 두 방정식을 얻을 수 있다.

$$2\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi)-\dot{\phi}^2\sin(\theta-\phi)=0$$
$$\ddot{\phi}+\ddot{\theta}\cos(\theta-\phi)-\dot{\theta}^2\sin(\theta-\phi)=0.$$

$\alpha=\phi-\theta$의 관계를 통해 θ와 α에 관해 표현할 수도 있다.

$$2\ddot{\theta}+\ddot{\alpha}\cos\alpha+(\dot{\theta}+\dot{\alpha})^2\sin\alpha=0$$
$$\ddot{\alpha}+\ddot{\theta}\cos\alpha+\dot{\theta}^2\sin\alpha=0.$$

두 방정식을 연립하면 $\theta(t)$, $\alpha(t)$ 각각의 운동 방정식을 구할 수 있는데, 그 과정이 복잡해 여기서는 다루지 않는다.

연습 문제 7: 이중 진자의 각운동량 형태를 계산하고. 중력장이 없을 때 보존된다는 것을 보여라.

해답: 연습 문제 6의 라그랑지안에 대해 θ와 ϕ 방향의 각운동량 $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$, $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$을 계산하면 다음과 같다.

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos(\theta - \phi),$$
$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} + \dot{\theta}\cos(\theta - \phi).$$

그리고 각운동량 보존은 오일러-라그랑주 방정식을 이용해 간접적으로 보일 수 있다.

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta - \phi)$$
$$\frac{dp_\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = \dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta - \phi).$$

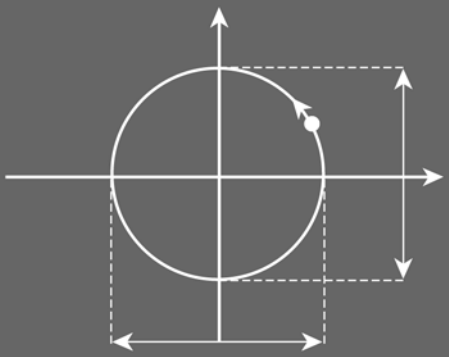
따라서 계의 전체 각운동량의 시간 도함수는

$$\frac{d}{dt}\sum_i p_i = \frac{dp_\theta}{dt} + \frac{dp_\phi}{dt} = -\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta - \phi) + \dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta - \phi) = 0$$

이므로, 계의 전체 각운동량이 보존된다는 것을 알 수 있다.

8강

해밀토니안 역학과 시간 이동 불변



레니와 조지가 들어섰을 때, 독은 바에 앉아

늘 마시던 비어 밀크셰이크를 마시며 신문을 읽고 있었다.

"뭘 읽고 있나, 독?"

독은 안경 너머로 레니를 올려다보았다.

"이 아인슈타인이라는 녀석이 '똑같은 일을 계속 반복해서 하면서

다른 결과를 기대한다면 제정신이 아니다.'라고 말한 걸 보고 있다네.

어떻게 생각하나?"

연습 문제 1: 라그랑지안 $L=\frac{m}{2}\dot{x}^2-\frac{k}{2}x^2$에서 시작해 변수 x를 $q=(km)^{1/4}x$로 바꾸면 라그랑지안이 식 (14)의 형태가 된다는 것을 보여라. k, m, ω 사이의 관계는 무엇인가?

식 (14): $L=\frac{1}{2\omega}\dot{q}^2-\frac{\omega}{2}q^2$

해답:

$$q=(km)^{1/4}x,\ x=\frac{q}{(km)^{1/4}}$$

$$\dot{q}=(km)^{1/4}\dot{x},\ \dot{x}=\frac{\dot{q}}{(km)^{1/4}}.$$

$$L=\frac{m}{2}\dot{x}^2-\frac{k}{2}x^2=\frac{m}{2}\frac{\dot{q}^2}{(km)^{1/2}}-\frac{k}{2}\frac{q^2}{(km)^{1/2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{k}{m}}}\dot{q}^2-\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2}q^2=\frac{1}{2\omega}\dot{q}^2-\frac{\omega}{2}q^2.$$

이때 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 이다.

연습 문제 2: 식 (14)에서 시작해 p와 q에 관한 해밀토니안을 계산하라.

식 (14): $L = \frac{1}{2\omega}\dot{q}^2 - \frac{\omega}{2}q^2$

해답: 해밀토니안의 정의에 따라

$$H = p\dot{q} - L = T + V$$

이다. $L = T - V$, $T = \frac{1}{2\omega}\dot{q}^2$, $V = \frac{\omega}{2}q^2$을 대입하면

$$p\dot{q} = \frac{1}{\omega}\dot{q}^2$$

$$\dot{q} = \omega p$$

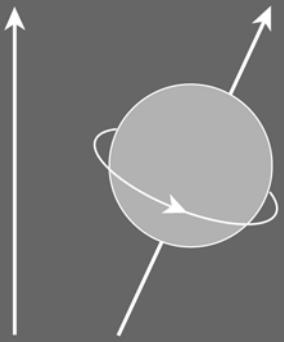
이다. 따라서 p, q에 대해 해밀토니안은

$$H = \frac{1}{2\omega}\dot{q}^2 + \frac{\omega}{2}q^2 = \frac{1}{2\omega}(\omega p)^2 + \frac{\omega}{2}q^2 = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2)$$

으로 표현된다.

10강

푸아송 괄호, 각운동량, 대칭성



레니가 물었다.

"이봐, 조지. 푸아송 괄호에 물고기를 매달 수 있을까?"

조지가 미소 지었다.

"그게 이론적이어야만 가능할걸."

연습 문제 1: 식 (14)를 증명하라.

식 (14): $\{F(q,p),p_i\}=\dfrac{\partial F(q,p)}{\partial q_i}$

해답:

$$\{A,B\}\equiv\sum_i\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right)$$

$$\{F,p_i\}=\sum_j\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial p_i}{\partial p_j}-\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial p_i}{\partial q_j}\right)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_i}=1,\ \frac{\partial p_i}{\partial q_i}=0,\ \frac{\partial p_j}{\partial p_i}=\frac{\partial p_j}{\partial q_i}=0.\ (j\neq i)$$

$$\{F(q,p),p_i\}=\frac{\partial F(q,p)}{\partial q_i}.$$

연습 문제 2: 해밀턴 방정식은 $\dot{q}=\{q,H\}$, $\dot{p}=\{p,H\}$ 의 형태로 쓸 수 있다. 해밀토니안이 $H=\frac{1}{2m}p^2+V(q)$의 형태라고 가정하자. PB 공리들만 이용해서 뉴턴의 운동 방정식을 증명하라.

해답:

$$\dot{q}=\{q,H\}=-\{H,q\}=-\left(-\frac{\partial H}{\partial p}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2m}p^2+V(q)\right)=\frac{1}{2m}2p=\frac{p}{m}$$

$$p=m\dot{q}$$

$$\dot{p}=m\ddot{q}.$$

한편

$$\dot{p}=\{p,H\}=-\{H,p\}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2m}p^2+V(q)\right)=-\frac{\partial V}{\partial q}$$

이다. 두 식에서 $\dot{p}$를 소거하면 $-\frac{\partial V}{\partial q}=m\ddot{q}$이고, 퍼텐셜 에너지 원리에 의해 $-\frac{\partial V}{\partial q}=F$이므로 뉴턴의 방정식 $F=m\ddot{q}$이 성립한다.

연습 문제 3: PB의 정의와 공리를 모두 사용해 식 (19)의 PB를 계산하라. (힌트: 각 표현식에서 x, y, z 좌표와 푸아송 괄호를 했을 때 0이 아닌 것들을 괄호 속에서 찾아보라. 예를 들면 첫 번째 PB에서는 x는 p_x와 0이 아닌 PB를 갖는다.)

식 (19): $\{x, L_z\} = \{x, (xp_y - yp_x)\}$

$\{y, L_z\} = \{y, (xp_y - yp_x)\}$

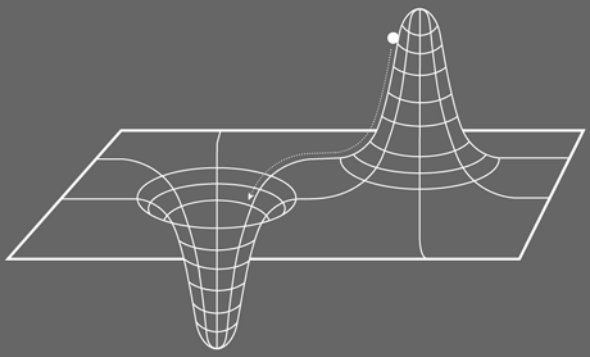
$\{z, L_z\} = \{z, (xp_y - yp_x)\}$

해답: 세 PB를 각각 계산해 보면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\{x, L_z\} &= \{x, (xp_y - yp_x)\} = \{x, xp_y\} - \{x, yp_x\} \\
&= x\{x, p_y\} + p_y\{x, x\} - y\{x, p_x\} - p_x\{x, y\} \\
&= -y\{x, p_x\} \\
&= -y \\
\{y, L_z\} &= \{y, (xp_y - yp_x)\} = \{y, xp_y\} - \{y, yp_x\} \\
&= x\{y, p_y\} + p_y\{y, x\} - y\{y, p_x\} - p_x\{y, y\} \\
&= x\{y, p_y\} \\
&= x \\
\{z, L_z\} &= \{z, (xp_y - yp_x)\} = \{z, xp_y\} - \{z, yp_x\} \\
&= x\{z, p_y\} + p_y\{z, x\} - y\{z, p_x\} - p_x\{z, y\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

11강

전기력과 자기력



그는 외투 호주머니에 자석을 갖고 있었다.
자석이 어떻게 못이나 다른 쇳조각을 끌어당기는지는
끝없는 매혹의 원천이었고,
나침반 바늘을 회전시키는 방식은 전 세계를 돌고 돌았다.
말굽 모양으로 생긴 그 쇳덩어리 속에는
어떤 마법이 숨어 있을까? 그게 무엇이든 간에
레니는 자신의 가장 좋아하는 장난감을 갖고 노는데

연습 문제 1: 다음을 증명하라.

$$(\vec{V}\times\vec{A})_i = \sum_j\sum_k \epsilon_{ijk} V_j A_k$$
$$V_iA_j - V_jA_i = \sum_k \epsilon_{ijk}(\vec{V}\times\vec{A})_k$$

해답: $x\to1$, $y\to2$, $z\to3$으로 치환해 i, j, k에 대입하면

$$\begin{aligned}(\vec{V}\times\vec{A})_x = (\vec{V}\times\vec{A})_1 &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{1jk}V_jA_k \\ &= \sum_{k=1}^{3}\epsilon_{11k}V_1A_k + \sum_{k=1}^{3}\epsilon_{12k}V_2A_k + \sum_{k=1}^{3}\epsilon_{13k}V_3A_k \\ &= \epsilon_{111}V_1A_1 + \epsilon_{112}V_1A_2 + \epsilon_{113}V_1A_3 \\ &\quad + \epsilon_{121}V_2A_1 + \epsilon_{122}V_2A_2 + \epsilon_{123}V_2A_3 \\ &\quad + \epsilon_{131}V_3A_1 + \epsilon_{132}V_3A_2 + \epsilon_{133}V_3A_3\end{aligned}$$

이다. 레비-치비타 ϵ_{ijk}는 $i\neq j\neq k$가 아닌 경우 0이므로

$$\begin{aligned}(\vec{V}\times\vec{A})_x = (\vec{V}\times\vec{A})_1 &= \epsilon_{123}V_2A_3 + \epsilon_{132}V_3A_2 = V_2A_3 - V_3A_2 \\ &= V_yA_z - V_zA_y\end{aligned}$$

이다. 이것은 $\vec{V}\times\vec{A}$의 x 성분과 일치한다. $(\vec{V}\times\vec{A})_y$, $(\vec{V}\times\vec{A})_z$에 대해서도 마찬가지이다. 한편

$$\begin{aligned}V_2A_3 - V_3A_2 &= (\vec{V}\times\vec{A})_1 \\ &= \epsilon_{231}(\vec{V}\times\vec{A})_1 + \epsilon_{232}(\vec{V}\times\vec{A})_2 + \epsilon_{232}(\vec{V}\times\vec{A})_2\end{aligned}$$

$$= \sum_k \epsilon_{23k} (\vec{V} \times \vec{A})_k$$

이다. $V_1 A_2 - V_2 A_1$, $V_3 A_1 - V_1 A_3$에 대해서도 성립하므로

$$V_i A_j - V_j A_i = \sum_k \epsilon_{ijk} (\vec{V} \times \vec{A})_k$$

이다.

연습 문제 2: 식 (4)를 증명하라.

식 (4): $\nabla \times [\nabla\ V] = 0$

해답: 스칼라 V에 대해 $\nabla\ V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$이다. 따라서

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$= (0, 0, 0)$$

이다.

연습 문제 3: 식 (8)과 식 (9)의 벡터 퍼텐셜이 모두 똑같이 균일한 자기장을 만든다는 것을 보여라. 이는 두 벡터 퍼텐셜이 그래디언트만큼 차이가 난다는 뜻이다. 자신의 그래디언트를 식 (8)에 더했을 때 식 (9)가 되는 스칼라를 구해라.

식 (8): $\overrightarrow{A}=(A_x, A_y, A_z)=(0, bx, 0)$
식 (9): $\overrightarrow{A'}=(A'_x, A'_y, A'_z)=(-by, 0, 0)$

해답:

$$\overrightarrow{B}=\nabla \times \overrightarrow{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(0, bx, 0)=(0, 0, b)$$

$$\overrightarrow{B'}=\nabla \times \overrightarrow{A'}=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(-by, 0, 0)=(0, 0, b).$$

따라서 $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{B'}$ 이고, 균일한 자기장 $B_z=b$를 갖는다. 한편 스칼라 s에 대해

$$\overrightarrow{A'}=\overrightarrow{A}+\nabla s$$
$$(-by, 0, 0)=(0, bx, 0)+\nabla s$$
$$\nabla s=(-by, -bx, 0)$$

이고

$$\frac{\partial}{\partial x}(-bxy)=-by, \frac{\partial}{\partial y}(-bxy)=-bx, \frac{\partial}{\partial z}(-bxy)=0$$

이므로 $s=-bxy$ 이다.

연습 문제 4: 식 (24)의 해밀토니안을 이용해 해밀턴 운동 방정식을 계산하고 그 결과가 정확히 뉴턴-로런츠 운동 방정식으로 되돌아가는 것을 보여라.

식 (24): $H=\sum_i\left\{\frac{1}{2m}\left[p_i-\frac{e}{c}A_i(x)\right]\left[p_i-\frac{e}{c}A_i(x)\right]\right\}$

해답:

$$H=\sum_i\frac{1}{2m}\left[p_i-\frac{e}{c}A_i(x)\right]^2$$

$$=\frac{1}{2m}\left[\left\{p_x-\frac{e}{c}A_x(x)\right\}^2+\left\{p_y-\frac{e}{c}A_y(x)\right\}^2+\left\{p_z-\frac{e}{c}A_z(x)\right\}^2\right].$$

x에 대한 첫 번째 해밀턴 방정식은

$$\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$=-\frac{1}{m}[\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right)\left(-\frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)$$

$$+\left(p_y-\frac{e}{c}A_y\right)\left(-\frac{e}{c}\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)+\left(p_z-\frac{e}{c}A_z\right)\left(-\frac{e}{c}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)]$$

이고, x에 대한 두 번째 해밀턴 방정식은

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{1}{m}\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right)$$

이다. 따라서

$$\dot{p}_x = \frac{e}{c}\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right] \quad \cdots (1)$$

이다. 한편 식 (16)과 같이 주어진 계의 라그랑지안은

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c}(x^2 + y^2 + z^2)$$

이므로

$$\dot{p}_x = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + \frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt}$$

이다. 이때 A_x의 전미분(total derivative)은

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}$$

이므로

$$\dot{p}_x = m\ddot{x} + \frac{e}{c}\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}\right] \quad \cdots (2)$$

이다.

식 (1)=(2)이므로

$$\frac{e}{c}\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right]=m\ddot{x}+\frac{e}{c}\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}\right]$$

$$m\ddot{x}=\frac{e}{c}\left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\dot{y}+\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\dot{z}\right]$$

이다. 이때

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=B_z,\ \ \frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}=B_y$$

을 대입하면 x 성분의 뉴턴-로런츠 방정식을 얻을 수 있다.

$$m\ddot{x}=\frac{e}{c}\left(B_z\dot{y}-B_y\dot{z}\right).$$

같은 방식으로 y, z 성분에 대해서도

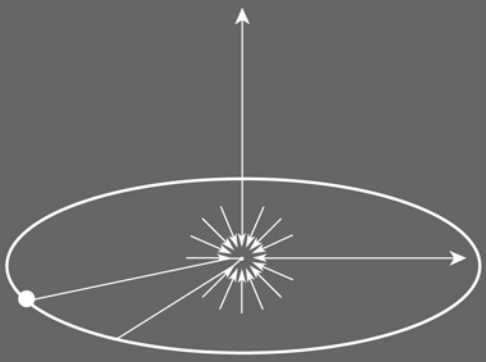
$$m\ddot{y}=\frac{e}{c}\left(B_x\dot{z}-B_z\dot{x}\right)$$

$$m\ddot{z}=\frac{e}{c}\left(B_y\dot{x}-B_x\dot{y}\right)$$

이다.

부록

중심력과 행성 궤도



레니는 몸을 굽혀 망원경의 접안렌즈 속을 들여다보았다.

그렇게 해 본 것이 처음이었다.

레니는 토성의 고리를 보고서 그 아름다움에 감탄했다.

"조지, 그 고리를 봤나?"

조지가 고개를 끄덕이며 말했다.

"그럼, 봤지."

레니는 친구를 올려다보았다.

연습 문제 1: 식 (17)은 2강의 식 (3)의 결과라는 사실을 보여라.

식 (17): $a=-\omega^2 r$

2강의 식 (3): $v_x=-R\omega\sin\omega t$

$$v_y=R\omega\cos\omega t$$

$$a_x=-R\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y=-R\omega^2\sin\omega t$$

해답:

$$\vec{r}=(x,y)=(\int v_x dt,\int v_y dt)$$

$$=(\int -R\omega\sin\omega t\,dt,\int R\omega\cos\omega t\,dt)$$

$$=R\omega(-\int\sin\omega t\,dt,\int\cos\omega t\,dt)$$

$$=R\omega(\frac{1}{\omega}\cos\omega t,\frac{1}{\omega}\sin\omega t)$$

$$=R(\cos\omega t,\sin\omega t).$$

$$\vec{a}=(a_x,a_y)=(-R\omega^2\cos\omega t,-R\omega^2\sin\omega t)$$

$$=-R\omega^2(\cos\omega t,\sin\omega t)$$

$$=-\omega^2\vec{r}.$$

물리의 정석 솔루션: 고전 역학 편

비매품

지은이 레너드 서스킨드, 조지 리보프스키
옮긴이 이종필
문제 풀이 (주)사이언스북스 편집부
펴낸이 박상준
펴낸곳 (주)사이언스북스

출판등록 1997. 3. 24.(제16-1444호)
(06027) 서울특별시 강남구 도산대로1길 62
대표전화 515-2000, 팩시밀리 515-2007
편집부 517-4263, 팩시밀리 514-2329
www.sciencebooks.co.kr

한국어판 © (주)사이언스북스, 2017. Printed in Seoul, Korea.

※ 이 솔루션은 『물리의 정석: 고전 역학 편』의 옮긴이인 이종필의 감수를 바탕으로 (주)사이언스북스 편집부에서 제작한 것이다.

끈 이론의 창시자에게 직접 듣는 물리학의 정석(定石)!

파인만의 『물리학 강의』를 잇는 21세기의 필수 교양

『물리의 정석』은 대충 읽어서 이해할 수 있는 책이 아니다. 하지만 그런 만큼 도전해 볼 만한 가치가 충분히 있다. 이 시대 최고의 물리학자가 안내하는 과학의 향연이라 더욱 그렇다. 『물리의 정석』을 통해 대가의 숨결과 함께, 자연의 기본 원리를 수학의 언어로 맛보는 희열을 만끽하길 바란다.

— 이종필(건국 대학교 교수), 「옮긴이의 글」에서

서스킨드의 『물리의 정석』은 파인만의 『물리학 강의』를 연상시킨다. 파인만의 책이 고전 역학과 열역학, 전자기학, 양자 역학 등 전형적인 물리학적 대상에 따라 파트가 나뉜 반면, 서스킨드의 책은 수학적 원리를 바탕으로 고전 물리학 전체를 한 권에 서술한다.

— 이범(교육 평론가)

정석 맞다. 거의 물리학과 학부 표준 교재다. 일반인이라면 마음 단단히 먹고 제대로 공부할 사람에게만 추천한다. 하지만 너무 겁먹진 마시라. 저자 서스킨드는 최고급 일류 요리사이고, 번역자 이종필 교수는 완벽한 테이블 세팅을 마쳤다. 당신은 즐기기만 하면 된다. 물론 쉽지는 않을 것이다. 행운을 빈다.

— 김상욱(부산 대학교 교수)

진정한 물리를 배우고자 하는 사람들을 위한 이상적인 출발점!

— 션 캐럴(이론 물리학자, 캘리포니아 공과 대학)

『물리의 정석』 솔루션

3 902000 135065

www.sciencebooks.co.kr