특수 상대성 이론과
고전 장론 편

레너드 서스킨드

아트 프리드먼
이종필 옮김

물리의 정석 솔루션

The Theoretical Minimum

사이언스북스
SCIENCE BOOKS

물리의 정석 솔루션

특수 상대성 이론과
고전 장론 편

물리의 정석 솔루션: 특수 상대성 이론과 고전 장론 편
비매품

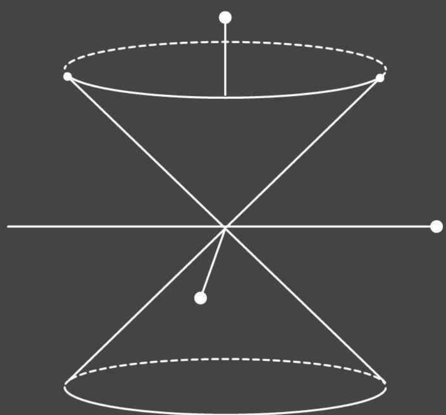
지은이 레너드 서스킨드, 아트 프리드먼
옮긴이 이종필
문제 풀이 ㈜사이언스북스 편집부
펴낸이 박상준
펴낸곳 ㈜사이언스북스

출판등록 1997.3.24.(제16-1444호)
(06027) 서울특별시 강남구 도산대로 1길 62
대표전화 515-2000, 팩시밀리 515-2007
편집부 517-4263, 팩시밀리 514-2329
www.sciencebooks.co.kr

※이 솔루션은 『물리의 정석: 특수 상대성 이론과 고전 장론 편』의 옮긴이인 이종필의 감수를 바탕으로 ㈜사이언스북스 편집부에서 제작한 것이다.

1강

로런츠 변환



연습 문제 1.1:

그림 1.6에서 점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{1-v^2}$ 임을 보여라.

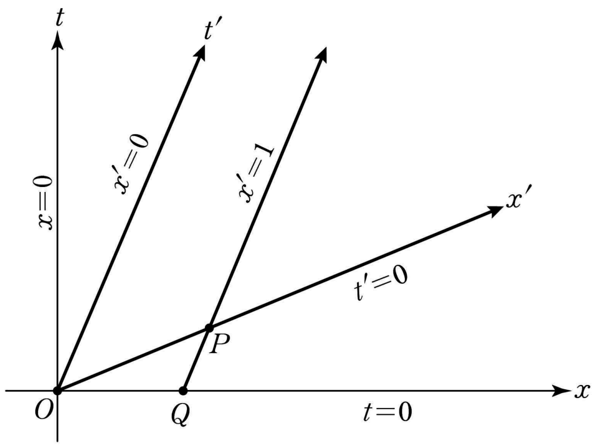


그림 1.6 길이 수축 연습 문제.

해답:

※식 1.19: $x' = \dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$

점 Q의 x' 좌표는 1, t 좌표는 0이다. 식 1.19에 대입하면 점 Q의 x좌표를 구할 수 있다.

$$1 = \frac{x - v \cdot 0}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$x = \sqrt{1-v^2}.$$

연습 문제 1.2:

그림 1.8에서 여행을 떠난 쌍둥이는 방향을 바꿀 뿐만 아니라 방향을 바꿀 때 다른 기준틀로 옮겨 간다.

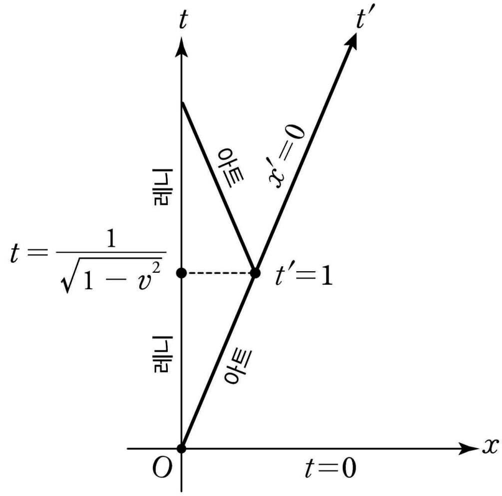


그림 1.8 쌍둥이 역설.

(a) 로런츠 변환을 이용해 방향 전환이 일어나기 전 쌍둥이들 사이의 관계가 대칭적임을 보여라. 각 쌍둥이는 자신보다 다른 쌍둥이가 더 천천히 노화하는 모습을 보게 된다.

(b) 시공간 도표를 이용해 여행하는 쌍둥이가 하나의 기준틀에서 다른 기준틀로 갑자기 옮겨 탄 것이 어떻게 그의 동시성에 대한 정의를 바꾸는지를 보여라. 여행자의 새로운 틀에서는 그 쌍둥이 형제가 원래 틀에서보다 갑자기 훨씬 더 노화된다.

해답:

(a) 그림 1.8에 따르면, 지구에 남은 레니의 관점에서 아트의 시계가 위치 $x' = 0$에서 $t' = 1$을 가리킬 때 레니의 시계는 $t = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$을 가리킨다. t는 1보다 항상 크므로, 레니의 관점에서 아트의 시간은 상대적으로 느리게 흐른다.

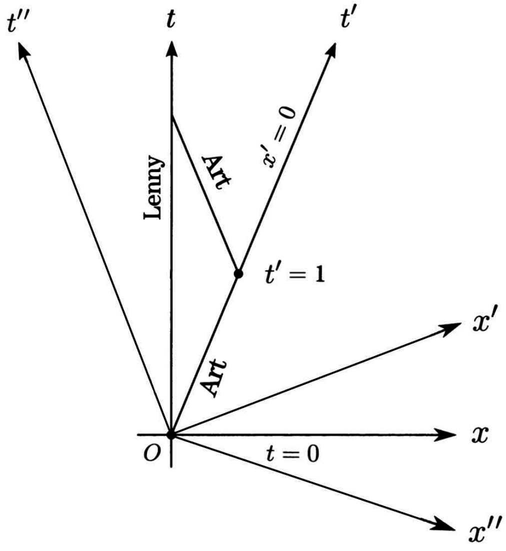
이번에는 아트의 관점에서 살펴보자. 레니의 시계가 위치 $x = 0$에서 $t = 1$을 가리킬 때, 아트의 시계(t')는 얼마를 가리킬까? 식 1.20에 대입하여 로런츠 변환을 하면 된다.

※식 1.20: $t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}$

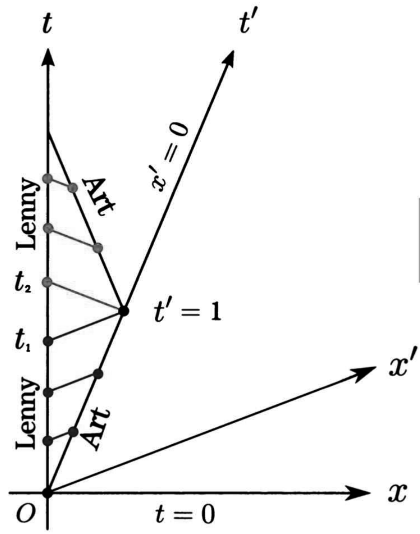
$$t' = \frac{1 - v \cdot 0}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

따라서 아트의 관점에서는 레니의 시간이 상대적으로 느리게 흐른다. 그리고 느리게 흐르는 비율이 $1/\sqrt{1-v^2}$으로 동일하기 때문에 아트와 레니의 관점은 서로 대칭적이다.

(b) 아트의 관성계에서 동시성을 정의해야 한다. 아트는 지구로부터 멀어져 갈 때와 멈춘 후 지구로 돌아올 때의 관성계가 서로 다르기 때문에, 각각의 과정에서 동시성의 정의가 다르다. 다음 시공간 그림을 통해 살펴보자.



아트가 지구로부터 멀어져 갈 때의 좌표축은 x', t'을 통해 나타내고, 지구로 돌아올 때의 좌표축은 x'', t''을 통해 나타낸다. 아트가 봤을 때 동시에 일어나는 사건은 시간 성분 t' 또는 t''이 같아야 한다. 따라서 아트의 관점에서 동시에 일어나는 사건들을 잇는 동시성 평면은 x' 또는 x''과 평행한 직선들이다. 이제 이 개념을 이용하여 아트의 관점에서 레니의 나이가 어떻게 변하는지 다음 시공간 그림을 통해 이해해 보자.



아트가 지구에서 멀어질 때 x'과 평행하게 동시에 일어나는 사건들을 이어 보면 파란색 선과 같다. 아트가 시간 $t' = 1$에서 정지하여 레니를 바라보면 그의 시간은 t_1이다. 아트가 지구로 돌아올 때 x''과 평행하게 동시에 일어나는 사건들을 이어 보면 붉은 선과 같다. 따라서 아트가 시간 $t' = 1$에서 출발하여 돌아오면서 레니를 바라보면 그의 시간은 t_2가 된다. 아트가 정지해서 돌아오는 순간에 레니의 나이는 순간적으로 t_1에서 t_2로 변하게 되며, 더 이상 둘 사이의 관계는 대칭적이지 않게 된다.

3강

상대론적 운동 법칙

Dear prof. Susskino,
Let me explain
Einsteins' mistake.
Force equals mass
times acceleration.
<F=MA> So I push
something with a
constant force for
a long time, - - -

연습 문제 3.1: $(\varDelta\tau)^2$ 의 정의로부터 식 3.7을 증명하라.

※식 3.7: $(U^0)^2-(U^1)^2-(U^2)^2-(U^3)^2=1$

해답:

식 3.2로 주어진 4-속도의 정의를 사용하여 전개해 보자.

※식 3.2: $U^\mu=\dfrac{dX^\mu}{d\tau}=\lim\limits_{\varDelta\tau\to 0}\dfrac{\varDelta X^\mu}{\varDelta\tau}$

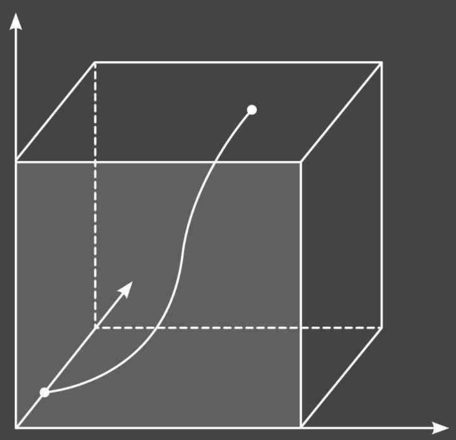
$$
\begin{aligned}
&(U^0)^2-(U^1)^2-(U^2)^2-(U^3)^2\\
&=\left(\frac{dX^0}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{dX^1}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{dX^2}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{dX^3}{d\tau}\right)^2\\
&=\lim_{\varDelta\tau\to 0}\left(\frac{\varDelta X^0}{\varDelta\tau}\right)^2-\left(\frac{\varDelta X^1}{\varDelta\tau}\right)^2-\left(\frac{\varDelta X^2}{\varDelta\tau}\right)^2-\left(\frac{\varDelta X^3}{\varDelta\tau}\right)^2\\
&=\lim_{\varDelta\tau\to 0}\frac{(\varDelta X^0)^2-(\varDelta X^1)^2-(\varDelta X^2)^2-(\varDelta X^3)^2}{(\varDelta\tau)^2}\,.
\end{aligned}
$$

고유 시간 간격의 정의
$(\varDelta\tau)^2=(\varDelta X^0)^2-(\varDelta X^1)^2-(\varDelta X^2)^2-(\varDelta X^3)^2$를 대입한다.

$$
\begin{aligned}
&(U^0)^2-(U^1)^2-(U^2)^2-(U^3)^2\\
&=\lim_{\varDelta\tau\to 0}\frac{(\varDelta X^0)^2-(\varDelta X^1)^2-(\varDelta X^2)^2-(\varDelta X^3)^2}{(\varDelta X^0)^2-(\varDelta X^1)^2-(\varDelta X^2)^2-(\varDelta X^3)^2}\\
&=1.
\end{aligned}
$$

5강

입자와 장



연습 문제 5.1:

$A^{\nu}A_{\nu}$는 $A^{\mu}A_{\mu}$와 같은 의미임을 보여라.

해답:

식 5.19에 따라 $A^{\mu}A_{\mu} = A^0A_0 + A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3$이다. 이 경우에 첨자 μ는 합 관례를 촉발하는 합첨자에 해당한다. 따라서 μ를 다른 그리스 문자로 바꾸어도 문제가 되지 않는다.

$$A^{\mu}A_{\mu} = A^0A_0 + A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3 = A^{\nu}A_{\nu}.$$

연습 문제 5.2:

식 5.20의 효과를 없애는 표현식을 써라. 즉 어떻게 우리는 "뒤로 갈까?"

※식 5.20: $A_{\mu} = \eta_{\mu\nu}A^{\nu}$

해답:

식 5.20을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} -A^t \\ A^x \\ A^y \\ A^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^t \\ A^x \\ A^y \\ A^z \end{pmatrix}.$$

반변 4-벡터 A^{ν}를 공변 4-벡터 A_{μ}로 첨자 내림하기 위해 계측 행렬 $\eta_{\mu\nu}$를 사용한다. “뒤로 가기” 위해서는 A_{μ}를 A^{ν}로 변환해 주는 행렬을 구하면 된다.

$$\begin{pmatrix} A^t \\ A^x \\ A^y \\ A^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & \eta^{\nu\mu} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A^t \\ A^x \\ A^y \\ A^z \end{pmatrix}.$$

항을 비교하면 쉽게 답을 유추할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} A^t \\ A^x \\ A^y \\ A^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A^t \\ A^x \\ A^y \\ A^z \end{pmatrix}.$$

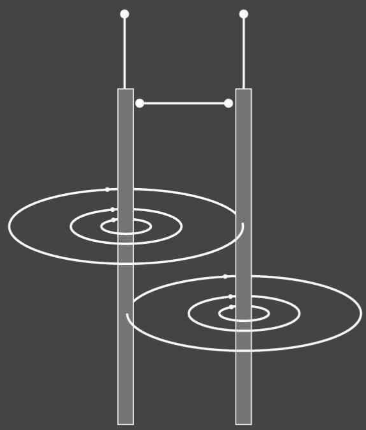
반변을 공변으로 변환하는 계측 행렬과 공변을 반변으로 변환하는 계측 행렬이 서로 동일하다는 사실을 알 수 있다. 수식을 통해 변환식을 표현하면 다음과 같다.

$$A^{\nu} = \eta^{\nu\mu} A_{\mu}.$$

여기서 $\eta^{\nu\mu}$에서 위 첨자를 사용한 이유는 아인슈타인 합을 쓰기 위해서이다. A_{μ}의 아래 첨자를 위 첨자로 올리기 위해 $\eta^{\nu\mu}$의 ν, μ 첨자가 모두 위 첨자로 적혀야 한다.

6강

로런츠 힘의 법칙



연습 문제 6.1:

4-벡터 A^{ν}의 반변 성분에 대해 변환식(식 6.3)이 주어져 있다. 여기서 $L^{\mu}{}_{\nu}$는 로런츠 변환 행렬이다. A의 공변 성분의 로런츠 변환은

$$(A')_{\mu} = M_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu}$$

임을 보여라. 여기서

$$M = \eta L \eta$$

이다.

※식 6.3: $(A')^{\mu} = L^{\mu}_{\ \nu} A^{\nu}$

해답:

계측 행렬과 공변 성분의 아인슈타인 합으로 반변 성분을 표현할 수 있다. ($\eta^{\mu\alpha} A_{\alpha} = A^{\mu}$) 이를 통해 식 6.3을 공변 성분에 대한 식으로 변형하자. (α, β는 합첨자이다.)

$$\eta^{\mu\alpha} (A')_{\alpha} = L^{\mu}_{\ \nu} \eta^{\nu\beta} A_{\beta}.$$

식의 양변에 $\eta_{\gamma\mu}$를 곱하고 전개해 보자.

$$\eta_{\gamma\mu} \eta^{\mu\alpha} (A')_{\alpha} = \eta_{\gamma\mu} L^{\mu}_{\ \nu} \eta^{\nu\beta} A_{\beta}.$$

계측 행렬 η의 성질 $\eta^{-1} = \eta$을 이용한다.

$$\eta^{-1}_{\gamma\mu}\eta^{\mu\alpha}(A')_{\alpha} = \eta_{\gamma\mu}L^{\mu}{}_{\nu}\eta^{\nu\beta}A_{\beta}.$$

여기서 행렬 I는 단위 행렬을 의미한다.

$$I_{\gamma}{}^{\alpha}(A')_{\alpha} = \eta_{\gamma\mu}L^{\mu}{}_{\nu}\eta^{\nu\beta}A_{\beta}$$

$$(A')_{\gamma} = \eta_{\gamma\mu}L^{\mu}{}_{\nu}\eta^{\nu\beta}A_{\beta}.$$

새로운 변환 행렬 M을 도입한다.

$$(A')_{\gamma} = M_{\gamma}{}^{\beta}A_{\beta}.$$

첨자를 γ, β에서 μ, ν로 바꾸어 준다.

$$(A')_{\mu} = M_{\mu}{}^{\nu}A_{\nu}.$$

중간에 $M_{\gamma}{}^{\beta} = \eta_{\gamma\mu}L^{\mu}{}_{\nu}\eta^{\nu\beta}$를 사용했다. 이를 행렬식으로 바꾸어 표현하면 다음과 같다.

$$M = \eta L\eta.$$

연습 문제 6.2:

표현식 6.28은 첨자 p를 공간의 z 성분과 일치시키고, n을 $(1, 2, 3)$값에 대해 더해서 유도한 것이다. 왜 표현식 6.28은 v_z 항을 포함하지 않는가?

※식 6.27: $\dot{X}^n\left(\frac{\partial A_n}{\partial X^p} - \frac{\partial A_p}{\partial X^n}\right)$

※식 6.28: $v_x\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)$

해답:

식 6.27에서 p에는 z 방향을 대입하고, n에는 아인슈타인 합에 따라 x 방향을 대입해 보자.

$$\dot{X}^x\left(\frac{\partial A_x}{\partial X^z} - \frac{\partial A_z}{\partial X^x}\right) = v_x\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right).$$

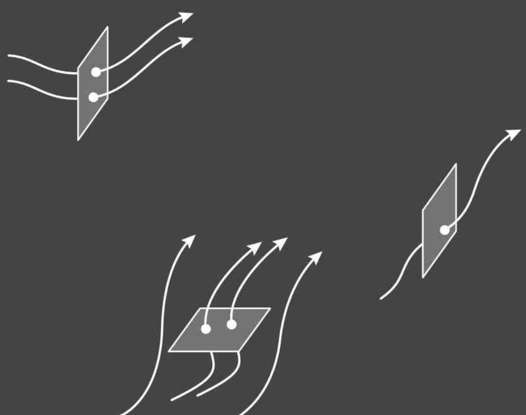
이는 식 6.28에서 첫 번째 항에 해당한다. 같은 방식으로 생각하면, 식 6.28에 v_z 항이 생기는 경우는 n에 z방향을 대입한 경우에 해당함을 알 수 있다. 식 6.27의 n에 z 방향을 대입해 보자.

$$\dot{X}^z\left(\frac{\partial A_z}{\partial X^z} - \frac{\partial A_z}{\partial X^z}\right) = v_z\left(\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = 0.$$

모든 항이 상쇄되어 0이 되므로 식 6.28에는 v_z 항이 존재하지 않는다.

◷ 8강 ◷

맥스웰 방정식



연습 문제 8.1:

정지해 있는 전기 전하를 생각해 보자. 추가적인 전기장이나 자기장은 없다. 정지틀 성분 (E_x, E_y, E_z)을 써서 표현했을 때 음의 x 방향으로 v의 속도로 움직이는 관측자에게 전기장의 x 성분은 무엇인가? y와 z 성분은 무엇인가? 그에 대응하는 자기장 성분은 무엇인가?

해답:

정지해 있는 전하이므로 자기장 $B_x = B_y = B_z = 0$이고 $F^{\mu\nu}$는 다음과 같이 주어진다.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & 0 & 0 \\ -E_y & 0 & 0 & 0 \\ -E_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

또한 $-v$로 움직이는 기준틀의 $L^{\mu}_{\ \nu}$는 다음과 같이 주어진다.

$$L^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

※식 8.2: $(F')^{\mu\nu} = L^{\mu}_{\ \sigma} L^{\nu}_{\ \tau} F^{\sigma\tau}$

식 8.2를 따라 $F^{\sigma\tau}$가 0이 아닌 항만 성분별로 계산하면 다

음과 같다.

$$(E')_x = (F')^{01} = L^0{}_\sigma L^1{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^0{}_0 L^1{}_1 F^{01} + L^0{}_0 L^1{}_2 F^{02} + L^0{}_0 L^1{}_3 F^{03} + L^0{}_1 L^1{}_0 F^{10}$$

$$+ L^0{}_2 L^1{}_0 F^{20} + L^0{}_3 L^1{}_0 F^{30}$$

$$= \gamma^2 E_x - v^2\gamma^2 E_x = (1-v^2)\gamma^2 E_x = E_x$$

$$(E')_y = (F')^{02} = L^0{}_\sigma L^2{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^0{}_0 L^2{}_1 F^{01} + L^0{}_0 L^2{}_2 F^{02} + L^0{}_0 L^2{}_3 F^{03} + L^0{}_1 L^2{}_0 F^{10}$$

$$+ L^0{}_2 L^2{}_0 F^{20} + L^0{}_3 L^2{}_0 F^{30}$$

$$= \gamma E_y$$

$$(E')_z = (F')^{03} = L^0{}_\sigma L^3{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^0{}_0 L^3{}_1 F^{01} + L^0{}_0 L^3{}_2 F^{02} + L^0{}_0 L^3{}_3 F^{03} + L^0{}_1 L^3{}_0 F^{10}$$

$$+ L^0{}_2 L^3{}_0 F^{20} + L^0{}_3 L^3{}_0 F^{30}$$

$$= \gamma E_z$$

$$(B')_x = (F')^{23} = L^2{}_\sigma L^3{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^2{}_0 L^3{}_1 F^{01} + L^2{}_0 L^3{}_2 F^{02} + L^2{}_0 L^3{}_3 F^{03} + L^2{}_1 L^3{}_0 F^{10}$$

$$+ L^2{}_2 L^3{}_0 F^{20} + L^2{}_3 L^3{}_0 F^{30}$$

$$= 0$$

$$
\begin{aligned}
(B')_y &= (F')^{31} = L^3{}_\sigma L^1{}_\tau F^{\sigma\tau} \\
&= L^3{}_0 L^1{}_1 F^{01} + L^3{}_0 L^1{}_2 F^{02} + L^3{}_0 L^1{}_3 F^{03} + L^3{}_1 L^1{}_0 F^{10} \\
&\quad + L^3{}_2 L^1{}_0 F^{20} + L^3{}_3 L^1{}_0 F^{30} \\
&= -\gamma v E_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(B')_z &= (F')^{12} = L^1{}_\sigma L^2{}_\tau F^{\sigma\tau} \\
&= L^1{}_0 L^2{}_1 F^{01} + L^1{}_0 L^2{}_2 F^{02} + L^1{}_0 L^2{}_3 F^{03} + L^1{}_1 L^2{}_0 F^{10} \\
&\quad + L^1{}_2 L^2{}_0 F^{20} + L^1{}_3 L^2{}_0 F^{30} \\
&= \gamma v E_y.
\end{aligned}
$$

연습 문제 8.2:

기차가 지나갈 때 아트는 기차역에 앉아 있다. 레니의 장 성분을 이용해 표현했을 때 아트가 관측한 E의 x 성분은 무엇인가? y와 z 성분은 무엇인가? 아트가 보는 자기장의 성분들은 무엇인가?

해답:

(본문 105쪽, 2강 '속도와 4-벡터'에서)

"아트가 기차역에 정지해 있다고 생각해 보자. 레니를 태운 기차가 광속의 90퍼센트로 아트를 지나 쌩하고 지나간다. 이들의 상대 속도는 $0.9c$이다. (중략)"

레니의 장 성분을 (E_x, E_y, E_z), 아트가 관측한 장 성분을 $((E')_x, (E')_y, (E')_z)$로 표현하자. 연습 문제 8.1의 결과에 $v = 0.9$, $\gamma \approx 0.294$를 대입하면 다음과 같다.

$$(E')_x = E_x$$

$$(E')_y = \gamma E_y \approx 0.294 E_y$$

$$(E')_z = \gamma E_z \approx 0.294 E_z$$

$$(B')_x = 0$$

$$(B')_y = -\gamma v E_z \approx -0.265 E_z$$

$$(B')_z = \gamma v E_y \approx 0.265 E_y.$$

연습 문제 8.3:
아인슈타인의 예에서 모든 전기장 및 자기장 성분을 전자 정지틀에서 계산하라.

해답:
아인슈타인의 예에서 B_z를 제외하고 나머지 성분은 0이므로 $F^{\mu\nu}$는 다음과 같이 주어진다.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & 0 \\ 0 & -B_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

또한 v로 움직이는 전자 기준틀의 $L^{\mu}_{\ \nu}$는 다음과 같이 주어진다.

$$L^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

※식 8.2: $(F')^{\mu\nu} = L^{\mu}_{\ \sigma} L^{\nu}_{\ \tau} F^{\sigma\tau}$

식 8.2를 따라 $F^{\sigma\tau}$가 0이 아닌 항만 성분별로 계산하면 다음과 같다.

$$(E')_x = (F')^{01} = L^0{}_\sigma L^1{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^0{}_1 L^1{}_2 F^{12} + L^0{}_2 L^1{}_1 F^{21}$$

$$= 0$$

$$(E')_y = (F')^{02} = L^0{}_\sigma L^2{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^0{}_1 L^2{}_2 F^{12} + L^0{}_2 L^2{}_1 F^{21}$$

$$= -v\gamma B_z$$

$$(E')_z = (F')^{03} = L^0{}_\sigma L^3{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^0{}_1 L^3{}_2 F^{12} + L^0{}_2 L^3{}_1 F^{21}$$

$$= 0$$

$$(B')_x = (F')^{23} = L^2{}_\sigma L^3{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^2{}_1 L^3{}_2 F^{12} + L^2{}_2 L^3{}_1 F^{21}$$

$$= 0$$

$$(B')_y = (F')^{31} = L^3{}_\sigma L^1{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^3{}_1 L^1{}_2 F^{12} + L^3{}_2 L^1{}_1 F^{21}$$

$$= 0$$

$$(B')_z = (F')^{12} = L^1{}_\sigma L^2{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^1{}_1 L^2{}_2 F^{12} + L^1{}_2 L^2{}_1 F^{21}$$

$$= \gamma B_z.$$

연습 문제 8.4:

표 8.1에서 맥스웰 방정식의 두 번째 그룹과 8.2.1절의 벡터 항등식 2개를 이용해 연속 방정식을 유도하라.

※연속 방정식: $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\cdot\vec{j}=0$

※표 8.1의 두 번째 그룹

(a) $\overrightarrow{\nabla}\cdot E=\rho$

(b) $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}-\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E}=\vec{j}$

※8.2.1절의 벡터 항등식 2개

(c) $\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A})=0$

(d) $\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}S)=0$

해답:

먼저 식 (a)의 양변을 시간에 대해 미분하고, 좌변과 우변을 바꾼다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}).$$

이때 우변의 시간 미분은 전기장의 발산과 순서를 바꿀 수 있다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E})=\overrightarrow{\nabla}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}.$$

식 (b)를 우변에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} - \vec{j}).$$

식 (c)를 이용하면 $\overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B}) = 0$이므로,

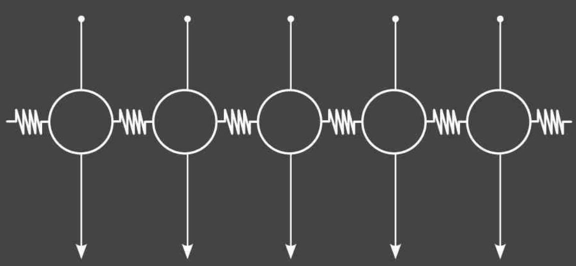
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} - \vec{j}) = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{j}.$$

우변의 식을 좌변으로 넘기면 원하는 연속 방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

11강

장과 고전 역학



연습 문제 11.1:

T^{0n} 이 포인팅 벡터임을 보여라.

※포인팅 벡터: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$

해답:

※식 11.42: $T^{\mu\nu} = F^{\mu\sigma}F^{\nu}_{\ \sigma} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau}$

식 11.42를 이용해 성분별로 계산해 보자. 이때 계측 텐서 η는 $\eta^{00} = -1$, $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = +1$ 외에는 0이므로 식 11.42의 우변에서 첫째 항만 고려하면 된다.

T^{01}를 먼저 계산해 보면 다음과 같다.

$$T^{01} = F^{0\sigma}F^{1}_{\ \sigma} - \frac{1}{4}\eta^{01}F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau}$$

$$= F^{0\sigma}F^{1}_{\ \sigma}$$

$$= F^{00}F^{1}_{\ 0} + F^{01}F^{1}_{\ 1} + F^{02}F^{1}_{\ 2} + F^{03}F^{1}_{\ 3}$$

$$= E_yB_z - E_zB_y.$$

이는 포인팅 벡터 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$의 x 성분과 같다.

동일한 방식으로 T^{02}와 T^{03}도 계산한다.

$$T^{02} = F^{0\sigma} F^{2}_{\ \sigma} - \frac{1}{4}\eta^{02} F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}$$

$$= F^{0\sigma} F^{2}_{\ \sigma}$$

$$= F^{00} F^{2}_{\ 0} + F^{01} F^{2}_{\ 1} + F^{02} F^{2}_{\ 2} + F^{03} F^{2}_{\ 3}$$

$$= E_z B_x - E_x B_z$$

$$= (E \times B)_y$$

$$T^{03} = F^{0\sigma} F^{3}_{\ \sigma} - \frac{1}{4}\eta^{03} F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}$$

$$= F^{0\sigma} F^{3}_{\ \sigma}$$

$$= F^{00} F^{3}_{\ 0} + F^{01} F^{3}_{\ 1} + F^{02} F^{3}_{\ 2} + F^{03} F^{3}_{\ 3}$$

$$= E_x B_y - E_y B_x$$

$$= (E \times B)_z .$$

T^{0n}이 $(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B})_n$ 성분과 일치하므로, T^{0n}는 포인팅 벡터이다.

$$\therefore T^{0n} = (\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B})_n .$$

연습 문제 11.2:

장 성분 (E_x, E_y, E_z)와 (B_x, B_y, B_z)를 써서 T^{11}과 T^{12}를 계산하라.

해답:

10.2.4절에서, 다음의 결과를 얻었다.

$$F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau} = 2(-E^2 + B^2).$$

이를 이용해 연습 문제 11.1과 동일하게 성분별로 계산하면 다음과 같다. 이때 계측 텐서 η는 $\eta^{11} = +1$을 대입한다.

$$T^{11} = F^{1\sigma}F^{1}{}_{\sigma} - \frac{1}{4}\eta^{11}F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau}$$

$$= F^{1\sigma}F^{1}{}_{\sigma} + \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$

$$= F^{10}F^{1}{}_{0} + F^{11}F^{1}{}_{1} + F^{12}F^{1}{}_{2} + F^{13}F^{1}{}_{3} + \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$

$$= -E_x^2 + B_z^2 + B_y^2 + \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$

$$= \frac{1}{2}(-E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + \frac{1}{2}(-B_x^2 + B_y^2 + B_z^2).$$

T^{12}의 경우, $\eta^{12} = 0$ 을 대입한다.

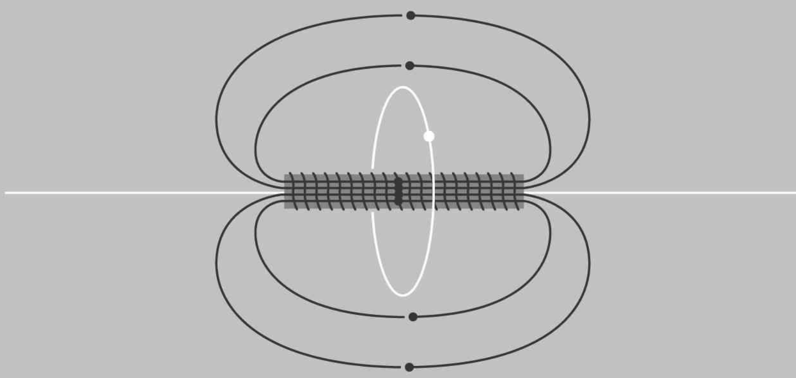
$$T^{12} = F^{1\sigma} F^{2}{}_{\sigma} - \frac{1}{4}\eta^{12} F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}$$

$$= F^{1\sigma} F^{2}{}_{\sigma}$$

$$= F^{10} F^{2}{}_{0} + F^{11} F^{2}{}_{1} + F^{12} F^{2}{}_{2} + F^{13} F^{2}{}_{3}$$

$$= -E_x E_y - B_x B_y .$$

부록 A ⏲ 자기 홀극 : 레니가 아트를 속이다



연습 문제 A.1:

식 9.18을 기초로 해서 식 A.13을 유도하라.

힌트: 9.2.5절의 식 9.22를 유도했던 것과 똑같은 논리를 따르면 된다.

※식 A.13: $E = \dfrac{\dot{\phi}}{2\pi r}$

※식 9.18: $EMF = -\dfrac{d\phi}{dt}$

※식 9.22: $B(r) = \dfrac{j}{2\pi r c^2}$

해답:

식 9.18의 우변에, 기전력(EMF)의 정의

$$EMF = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

를 대입하면 다음과 같다.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\dot{\phi}.$$

솔레노이드에서 $\vec{E}$와 $d\vec{l}$은 항상 반대 방향으로 나란하므로 아래 식과 같이 쓸 수 있다.

$$2\pi r E = \dot{\phi}.$$

이때 자속 변화의 $-$부호가 사라진 것은, 식 A.13을 정의할 때 E를 전기장의 크기로 정의했기 때문임에 유의한다. 이를 다시 정리하면 식 A.13을 얻는다.

$$E = \frac{\dot{\phi}}{2\pi r}.$$

※다음 내용은 저자가 "연습 문제로 남겨 둘 것이다."라고 언급했으나 따로 번호를 부여받지는 못한 문제들에 대한 추가적 설명과 풀이입니다.

110쪽 추가 문제 1:

2.1장의 예시에서 아트의 틀과 매기의 틀이 로런츠 변환으로 연결돼 있음을 검증해라. 식 2.10과 식 2.11을 증명하면 된다.

※식 2.10: $x'' = \dfrac{x - \omega t}{\sqrt{1-\omega^2}}$

※식 2.11: $t'' = \dfrac{t - \omega x}{\sqrt{1-\omega^2}}$

여기서 ω는 식 2.9로부터 정의되어 있다.

※식 2.9: $\omega = \dfrac{u+v}{1+uv}$

해답:

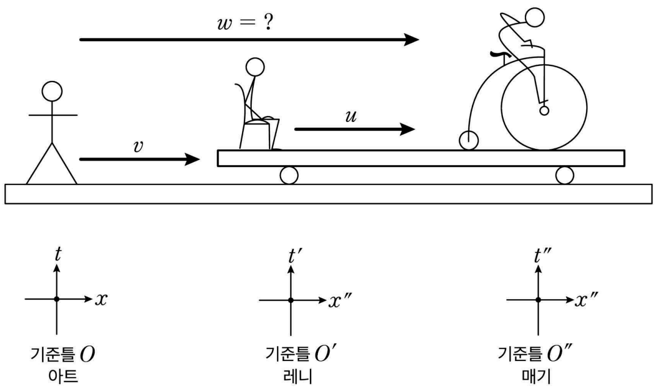


그림 2.1 속도 결합하기.

그림 2.1을 통해 문제 상황을 살펴볼 수 있다. 로런츠 변환을 통해 시공간 좌표들 간의 관계가 주어진다.

※식 2.1: $x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$

※식 2.2: $t' = \dfrac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}$

※식 2.5: $x'' = \dfrac{x' - ut'}{\sqrt{1 - u^2}}$

※식 2.6: $t'' = \dfrac{t' - ux'}{\sqrt{1 - u^2}}$

식 2.1과 식 2.2를 식 2.5에 대입해 정리하자.

$$x'' = \frac{\left(\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} - u\dfrac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{x-vt-u(t-vx)}{\sqrt{1-v^2}\,\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{(1+uv)x-(u+v)t}{\sqrt{1-v^2}\,\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{x-\omega t}{\left(\dfrac{\sqrt{1-v^2}\,\sqrt{1-u^2}}{1+uv}\right)}.$$

분모를 간단히 할 수 있다.

$$\frac{\sqrt{1-v^2}\,\sqrt{1-u^2}}{1+uv} = \sqrt{\frac{u^2v^2-u^2-v^2+1}{u^2v^2+2uv+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{u^2v^2+2uv+1}{u^2v^2+2uv+1} - \frac{u^2+2uv+v^2}{u^2v^2+2uv+1}}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{u+v}{1+uv}\right)^2} = \sqrt{1-\omega^2}.$$

이를 대입하면 식 2.10을 얻는다. 같은 방식으로 식 2.1과 식 2.2를 식 2.6에 대입해 정리하자.

$$t'' = \frac{\left(\dfrac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} - u\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{t-vx-u(x-vt)}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{(1+uv)t-(v+u)x}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{t-\omega x}{\left(\dfrac{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}{1+uv}\right)} = \frac{t-\omega x}{\sqrt{1-\omega^2}}.$$

이는 식 2.11이다.

164쪽 추가 문제 2:

식 3.43에서 광속 c를 복원해 식 3.44가 됨을 확인하라.

※식 3.43: $E=\sqrt{P^2+m^2}$

※식 3.44: $E=\sqrt{P^2c^2+m^2c^4}$

해답:

3.5.1절에서 광속 c를 복원했던 것과 같이 단위 분석을 통해 광속 c를 복원할 수 있다.

우선 식 3.43의 양변을 제곱해 양변의 단위를 분석한다.

$$E^2=P^2+m^2.$$

좌변의 항은 에너지의 제곱인데, 에너지는 질량$\times$속도^{2}으로 주어지므로 좌변의 단위는 질량$^2\times$속도^{4}이 된다.

우변의 운동량 항부터 살펴보면, 운동량은 질량$\times$속도로 주어지므로 P^2 항은 질량$^2\times$속도^{2}의 단위를 가진다. 좌변의 에너지 제곱 항과 비교했을 때 속도^{2}만큼 단위가 부족하므로, 속도의 단위를 가진 광속 c를 두 번 곱해 단위를 일치시켜 주어야 한다.

$$P^2\rightarrow P^2c^2.$$

우변의 질량 항은 질량^{2}의 단위를 가지고 좌변과 비교하면 속도^{4}만큼 단위가 부족하므로 광속 c를 네 번 곱해 단위를 일치시킨다.

$$m^2 \rightarrow m^2 c^4.$$

위에서 얻은 결과를 바탕으로 에너지 방정식을 다시 적으면 식 3.44와 동일하다.

$$E^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$E = \sqrt{P^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

258쪽 추가 문제 3:

A^{μ}와 B^{μ}가 모두 4-벡터일 때, 다음을 증명하라.

$$A^{\mu}B_{\mu} = A_{\mu}B^{\mu}.$$

해답:

계측 행렬 η를 이용해 A^{μ}를 첨자 내림하고 B_{μ}를 첨자 올림한다.

$$A^{\mu}B_{\mu} = \eta^{\mu\nu}A_{\nu}\eta_{\mu\sigma}B^{\sigma} = \eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\sigma}A_{\nu}B^{\sigma}.$$

계측 행렬 η는 $\eta^{00} = \eta_{00} = -1$, $\eta^{11} = \eta_{11} = +1$, $\eta^{22} = \eta_{22} = +1$, $\eta^{33} = \eta_{33} = +1$ 외에는 모두 0이므로, 0이 아닌 항만 계산하면 다음과 같다.

$$A^{\mu}B_{\mu} = A_0B^0 + A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3.$$

그런데 우변은 $A_{\mu}B^{\mu}$을 전개한 식과 같다. 따라서 원하는 결과를 얻는다.

$$A^{\mu}B_{\mu} = A_{\mu}B^{\mu}.$$

258쪽 추가 문제 4:

$A_\mu B^\mu$이 스칼라이고 A^μ가 4-벡터일 때, B^μ 역시 4-벡터가 됨을 증명하라.

해답:

A^μ는 4-벡터이므로 로런츠 변환을 따른다.

$$A'^\mu = L^\mu{}_\nu A^\nu,\ \ A'_\mu = M_\mu{}^\nu A_\nu.$$

A^μ가 4-벡터라면 $A_\mu A^\mu$는 스칼라이므로 두 기준틀에 관계 없이 불변하는 물리량이다.

$$\begin{aligned}
&A_\mu A^\mu = A'_\alpha A'^\alpha \\
&= (M_\alpha{}^\beta A_\beta)(L^\alpha{}_\nu A^\nu) \\
&= M_\alpha{}^\beta L^\alpha{}_\nu A_\beta A^\nu \\
&\equiv A_\beta A^\beta.
\end{aligned}$$

위 관계식이 임의의 4-벡터 A^μ에 대해 성립하기 위해서는 M과 L 사이에는 다음과 같은 관계가 성립해야 한다.

$$\begin{aligned}
&M_\alpha{}^\beta L^\alpha_\nu = L^{\mathrm{T}}{}_\nu{}^\alpha M_\alpha{}^\beta \\
&= (L^{\mathrm{T}} M)_\nu{}^\beta \\
&= \delta_\nu{}^\beta
\end{aligned}$$

$$\therefore\ M_\alpha{}^\beta = (L^{\mathrm{T}})^{-1}{}_\alpha{}^\beta$$

$A_\mu B^\mu$ 또한 스칼라이기 때문에 두 기준틀에 관계없이 불변하는 물리량이다.

$$\begin{aligned}
&A_\mu B^\mu = A'_\alpha B'^\alpha \\
&= M_\alpha{}^\beta A_\beta B'^\alpha \\
&= (L^{\mathrm{T}})^{-1}{}_\alpha{}^\beta A_\beta B'^\alpha \\
&\equiv A_\beta B^\beta .
\end{aligned}$$

따라서 B^β는 다음 변환을 따른다.

$$B^\beta = (L^{\mathrm{T}})^{-1}{}_\alpha{}^\beta B'^\alpha .$$

이때 일반적으로 전치행렬의 역행렬은 역행렬의 전치행렬과 같다는 성질(∗)을 이용하면

$$\begin{aligned}
&B^\beta = (L^{\mathrm{T}})^{-1}{}_\alpha{}^\beta B'^\alpha \\
&= (L^{-1})^{\mathrm{T}}{}_\alpha{}^\beta B'^\alpha \\
&= (L^{-1})^\beta{}_\alpha B'^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&L^{-1} \bullet B' = B \\
&\therefore\ B' = LB,\ B'^\mu = L^\mu{}_\nu B^\nu .
\end{aligned}$$

B^μ 역시 로런츠 변환을 따르므로 4-벡터이다.

(∗) 전치행렬의 역행렬이 역행렬의 전치행렬과 같음을 증명하는 과정은 다음과 같다.

$$C \bullet C^{-1} = I \Rightarrow (C^{-1})^{T} C^{T} = I$$
$$C^{T} = [(C^{-1})^{T}]^{-1}$$

$$\therefore (C^{T})^{-1} = (C^{-1})^{T}.$$

432쪽 추가 문제 5:
식 9.7을 증명해라.

※식 9.7: $\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V})=\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V})-\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{V}$

해답:
부록 B.4에 회전의 정의가 있다.

$$(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A})_x=\partial_y A_z-\partial_z A_y$$

$$(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A})_y=\partial_z A_x-\partial_x A_z$$

$$(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A})_z=\partial_x A_y-\partial_y A_x.$$

회전의 정의를 사용해 식 9.7 좌변의 x 방향 성분부터 구해 보자.

$$(\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V}))_x=\partial_y(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V})_z-\partial_z(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V})_y$$

$$=\partial_y(\partial_x V_y-\partial_y V_x)-\partial_z(\partial_z V_x-\partial_x V_z)$$

$$=-\partial_y^2 V_x-\partial_z^2 V_x+\partial_y\partial_x V_y+\partial_z\partial_x V_z.$$

여기에 $\partial_x^2 V_x$를 더하고 빼 주어서 식을 정리할 수 있다.

$$(\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V}))_x=\left(-\partial_x^2-\partial_y^2-\partial_z^2\right)V_x+\partial_x\partial_x V_x.$$

$$+\partial_y\partial_x V_y+\partial_z\partial_x V_z.$$

이제 미분의 순서를 바꾸어 주자.

$$\left(\overrightarrow{\nabla}\times\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V}\right)\right)_x=\left(-\partial_x^2-\partial_y^2-\partial_z^2\right)V_x+\partial_x\partial_x V_x$$

$$+\partial_x\partial_y V_y+\partial_x\partial_z V_z$$

$$=\left(-\partial_x^2-\partial_y^2-\partial_z^2\right)V_x+\partial_x\left(\partial_x V_x+\partial_y V_y+\partial_z V_z\right).$$

부록 B.3에 있는 발산의 정의, 그리고 B.5에 있는 벡터 라플라시안의 정의를 쓸 수 있다.

발산: $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}=\partial_x\overrightarrow{A_x}+\partial_y\overrightarrow{A_y}+\partial_z\overrightarrow{A_z}$

벡터 라플라시안:

$$\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{A}=(\nabla^2 A_x,\nabla^2 A_y,\nabla^2 A_z)$$

$$=((\partial_x^2+\partial_x^2+\partial_x^2)A_x,(\partial_x^2+\partial_x^2+\partial_x^2)A_y,(\partial_x^2+\partial_x^2+\partial_x^2)A_z)$$

이들을 사용해 식을 간단하게 만들자.

$$\left(\overrightarrow{\nabla}\times\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V}\right)\right)_x=-\left(\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{V}\right)_x+\partial_x\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}\right)$$

$$=-\left(\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{V}\right)_x+\left(\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}\right)\right)_x.$$

마찬가지로 y, z 성분에 대해서도 같은 관계를 만족한다.

$$\left(\overrightarrow{\nabla}\times\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V}\right)\right)_y=\left(\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}\right)\right)_y-\left(\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{V}\right)_y$$

$$\left(\overrightarrow{\nabla}\times\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V}\right)\right)_z=\left(\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}\right)\right)_z-\left(\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{V}\right)_z.$$

따라서 식 9.7이 성립한다.

$$\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V})=\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V})-\overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{V}.$$

끈 이론의 창시자에게 직접 듣는
특수 상대성 이론의 정석(定石)!

로런츠 변환, 맥스웰 방정식, 게이지 불변을
자기 손으로 유도하는 즐거움!

보통 사람은 잘 파악하지 못하는 물리 현상 또는 원리에서 대칭적인 요소를 파악하는 것이 대가의 능력이다. 여든이 넘은 고령에도 서스킨드의 논증은 언제나 대상의 본질을 꿰뚫고 있다. —이종필(옮긴이, 건국 대학교 교수)

『물리의 정석』에서 저자들은 현대 물리학의 절대적 중심인 상대성 이론과 장론을 지혜와 통찰력으로 명석하게 설명하며, 아무것도 숨기지 않고 물리학의 영광을 오롯이 드러낸다. —션 캐럴(캘리포니아 공과 대학)

세월이 흐를수록 빛이 날 진정한 걸작이다. 내가 고전 물리학을 배울 때 이 책이 있었더라면! 당신을 연구에 뛰어들게 할 비밀들로 가득한, 즐거운 경험을 안겨 주는 책이다. —스테판 알렉산더(브라운 대학교)

서스킨드의 비결은 물리 초보자를 수학과 역사의 훈련장에 보내서, 『물리의 정석』을 따르는 길이 자연스럽고 결국에는 더 쉽게 느껴지도록 하는 것이다. 재치와 통찰력이 빛나는 작업이다. —《네이처》

서스킨드는 물리적 현상에 방정식을 적용하는 각 단계를 꼼꼼하게 설명하고, 왜 수학이 그렇게 작용하는지를 설명하는 일에 탁월한 소질이 있다. —《사이언스 뉴스》

서스킨드와 프리드먼은 『물리의 정석』 세 번째 책에서 아인슈타인 특수 상대성 이론과 고전 장론의 수학적 핵심을 탐구한다. 명확하고, 간결하고, 시원시원하게. —《퍼블리셔스 위클리》

『물리의 정석』 솔루션: 특수 상대성
이론과 고전 장론 편(사이언스북스)

3 902000 314583

www.sciencebooks.co.kr